Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО "Российский государственный профессионально-
педагогический университет"
Уральское отделение Российской академии образования
Академия профессионального образования

Л.К. Конышева, Т.А. Серова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Рекомендовано УМО по математике педвузов Волго-Вятского региона в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Прикладная информатика"

Екатеринбург 2007

УДК 510.22(075.8)
ББК В126я73
К65

Конышева Л.К., Серова Т.А. Элементы теории нечетких множеств: Учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО "Рос. гос. проф.-пед. ун-т", 2007. 129 с.

ISBN 978-5-8050-0214-5

Рассмотрены основы теории нечетких множеств, нечетких бинарных отношений и нечеткой логики, приемы использования аппарата теории в алгоритмах решения прикладных задач. Приведены задания для самостоятельной работы.

Предназначено студентам специальности "Прикладная информатика (по отраслям)".

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Баранский (ГОУ ВПО "Уральский государственный университет"), канд. физ.-мат. наук, доц. Е.А. Перминов (ГОУ ВПО "Российский государственный профессионально-педагогический университет").

ISBN 978-5-8050-0214-5

Введение

Получение, хранение, использование и переработка информации – важнейшие проблемы нашего времени. В самых различных областях деятельности человеку приходится иметь дело с большими и очень большими системами. Но большая сложность несовместима с высокой точностью, или, по-другому, сложность системы и точность, с которой ее можно анализировать, в первом приближении обратно пропорциональны [4].

Необходимость постоянно иметь дело с неопределенностью привела к разработке ряда методов, позволяющих получить достаточно точные результаты в условиях неполной или неточной исходной информации. Один из подходов к решению задач в условиях неопределенности основан на теории нечетких множеств. Впервые термин "нечеткие множества" ("Fuzzy Sets") появился в работе американского ученого Л. Заде в 1965 г. Именно его идеи дали толчок для развития "нечеткой математики", включающей наряду с аппаратом нечетких множеств и другие приемы работы с неопределенностью.

Идеи Л. Заде и его последователей находят применение при создании систем, понимающих тексты на естественном языке, при создании планирующих систем, опирающихся на неполную информацию, при обработке зрительных сигналов, при управлении техническими, социальными и экономическими системами, в системах искусственного интеллекта и робототехнических системах [11].

В настоящее время много книг и статей, посвященных общим и частным вопросам теории нечетких множеств. Однако учебной литературы по данному разделу математики явно недостаточно.

Настоящее учебное пособие призвано восполнить недостаток учебных материалов нужного уровня и профиля по теории нечетких множеств. Работа с пособием предполагает изучение теоретического материала с тщательным разбором приводимых примеров и выполнение заданий для самостоятельной работы. Наборы таких заданий помещены в конце разделов за исключением главы "Лингвистическая переменная". Задачи на использование лингвистической переменной имеются в главе "Нечеткие булевы переменные".

1. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Примеры обычных и нечетких множеств

Напомним, что "множество" – это неопределяемое понятие математики. Георг Кантор (1845 – 1918) – немецкий математик, чьи работы лежат в основе современной теории множеств, говорил, что множество – это многое, мыслимое как единое.

Каждый раздел математики использует свои множества. Начиная решать какую-либо задачу, прежде всего определяют множество тех объектов, которые будут в ней рассмотрены. Например, в задачах математического анализа изучают всевозможные числа, их последовательности, функции и т.п. Множество, включающее в себя все объекты, рассматриваемые в задаче, называют *универсальным множеством* (для данной задачи).

Универсальное множество принято обозначать буквой U. Универсальное множество является максимальным множеством в том смысле, что все объекты являются его элементами, т. е. утверждение $x \in U$ в рамках задачи всегда истинно. Минимальным множеством является *пустое множество* – $\varnothing$, которое не содержит ни одного элемента.

Все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами множества U. Напомним, что множество A называют *подмножеством множества* B, если все элементы A являются также элементами B.

Задание множества A – это правило, позволяющее относительно любого элемента x универсального множества U *однозначно* установить, принадлежит x множеству A или не принадлежит. Другими словами, это правило, позволяющее определить, какое из двух высказываний, $x \in A$ или $x \notin A$, является истинным, а какое ложным.

Один из способов задания множеств – задание с помощью *характеристической функции.*

Определение 1.1. ***Характеристической функцией множества*** A называют функцию $\mu_A(x)$, заданную на универсальном множестве U и принимающую значение единица на тех элементах множества U, которые принадлежат A, и значение нуль на тех элементах, которые не принадлежат A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin A \\ 1, & \text{если} \quad x \in A \end{cases}, (x \in U) \tag{1.1}$$

Рассмотрим в качестве примера универсальное множество $U=\{1,2,3,...,10\}$ и два его подмножества: A – множество чисел, меньших 7, и B – множество чисел, немного меньших 7. Характеристическая функция множества A имеет вид

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x<7\\ 0, & \text{если} \quad x\geq 7\end{cases}.$$

Записать характеристическую функцию множества B, используя лишь 0 и 1, невозможно. Например, включать ли в B числа 1 и 2? "Много" или "немного" число 3 меньше 7? Ответы на эти и подобные им вопросы могут быть получены в зависимости от условий задачи, в которой используются множества U и B, а также от субъективного взгляда того, кто решает эту задачу.

Множество A в данном примере является обычным множеством, множество B – нечетким множеством. При составлении характеристической функции $\mu_B(x)$ решающий задачу (эксперт) может высказать свое мнение относительно того, в какой степени каждое из чисел множества U принадлежит B. В качестве степени принадлежности можно выбрать любое число с отрезка [0,1]. При этом $\mu_B(x_1)=1$ означает полную уверенность эксперта в том, что $x_1\in B$; $\mu_B(x_2)=0$ – столь же полную уверенность, что $x_2\notin B$; $\mu_B(x_3)=0.5$ говорит о том, что эксперт затрудняется в ответе на вопрос, принадлежит ли x_3 множеству B или не принадлежит. Если $\mu_B(x)>0.5$, то эксперт склонен отнести x к множеству B, если же $\mu_B(x)<0.5$, – то не склонен.

Установленные экспертом значения степени принадлежности нечеткому множеству B каждого из элементов универсального множества U представляют собой функцию, определенную на множестве U и принимающую значения на отрезке [0,1]. Такую функцию называют ***функцией принадлежности*** нечеткому множеству B. Подчеркнем, что функция принадлежности отражает субъективный взгляд специалиста на задачу, вносит индивидуальность в ее решение.

Отметим, что характеристическую функцию $\mu_A(x)$ "обычного"[1] множества A можно рассматривать как функцию принадлежности этому множеству, но в отличие от нечеткого множества, $\mu_A(x)$ принимает лишь два значения: 0 или 1.

---

[1] В литературе прилагательное "обычный" в сочетании со словом "множество" пишут в кавычках. Однако чтобы не загромождать текст, в дальнейшем кавычки мы будем опускать.

Так, если $U=\{1,2,3,...,10\}$, A – множество чисел, меньших 7, B – множество чисел, немного меньших 7, то $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ можно представить в виде таблицы:

x ($x \in U$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mu_B(x)$	0	0	0.5	0.6	0.8	0.9	0	0	0	0

В литературе (например, [2]) используется более компактная запись конечных или счетных нечетких множеств. Так, вместо приведенного выше табличного представления подмножеств A и B, эти подмножества можно записать следующим образом:

$A = 1/1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6$;

$B = 0.5/3+0.6/4+0.8/5+0.9/6$.

В приведенных равенствах указаны значения функции принадлежности для соответствующих элементов множества U, знак "+" означает объединение одноэлементных подмножеств U, для которых значения функции принадлежности больше нуля. Такое объединение называют ***несущим множеством*** или ***носителем*** соответствующего нечеткого множества. Так, несущее множество для B состоит из чисел: $\{3,4,5,6\}$.

Общая форма записи нечеткого подмножества для случаев, когда U конечно или счетно:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i \qquad (u_i \in U) \tag{1.2}$$

Элемент множества U, на котором значение функции принадлежности равно 0.5, называют ***точкой перехода***. Точкой перехода для множества B, в рассмотренном выше примере является $x=3$. Точка перехода – это точка, о которой мнение эксперта можно выразить словами "неизвестно", "не определено" и т.п.

Если функция принадлежности нечеткого множества достигает 1, то множество называют ***нормальным***, если не достигает – то ***субнормальным***. Поскольку в разобранном примере ни одно из значений $\mu_B(x)$ не достигло своего возможного максимального значения – единицы, то B – нечеткое субнормальное множество.

Субнормальное множество можно нормировать, разделив все значения функции принадлежности на ее наибольшее значение. Множество B после нормирования примет вид

$$B_{норм}=\frac{5}{9}/3+\frac{2}{3}/4+\frac{8}{9}/5+1/6.$$

В некоторых случаях бывает удобным графическое представление множеств (рис.1.1).

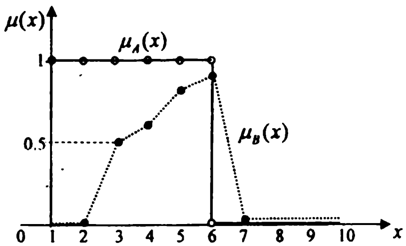


Рис. 1.1. Графическое изображение функций принадлежности обычного множества A и нечеткого множества B

Рассмотрим другой пример. Пусть $U=\{x, x\in R:1\le x\le 3\}$ – рост взрослого человека в метрах; A – высокий рост, B – средний рост, C – маленький рост. A, B и C являются нечеткими множествами.

В данном примере несущими множествами для них являются промежутки числовой оси. На рис. 1.2 представлены графики возможных функций принадлежности каждого из этих множеств.

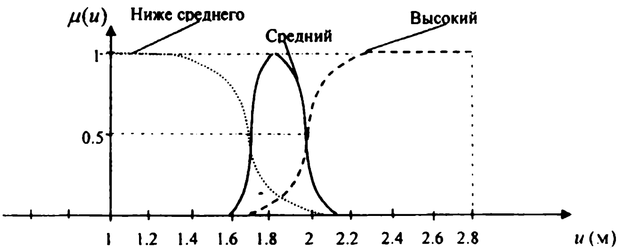


Рис. 1.2. Возможные графики функций принадлежности нечетким множествам:
A – высокий рост; B – средний рост; C – маленький рост

Несущие множества для A, B и C: $U_A = (1.7,2.8)$, $U_B = (1.6,2.1)$, $U_C = (1,2.05)$. Функция $\mu_B(x)$ имеет единственный максимум. Такую функцию называют ***унимодальной***. Все три множества A, B и C являются нормальными, так как достигают наибольшего возможного значения – единицы. По аналогии с конечными нечеткими множествами, запишем A, B и C в следующей форме:

$$A = \int_{U_A} \mu_A(u)/u, \quad B = \int_{U_B} \mu_B(u)/u, \; C = \int_{U_C} \mu_C(u)/u.$$

В общем случае нечеткое множество A с непрерывным носителем U будем обозначать символом:

$$A = \int_{U} \mu_A(u)/u. \tag{1.3}$$

Использование знака $A = \int_{U} \mu_A(u)/u$ не означает интегрирования, но предполагает, как и в случае использования символа $\sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ (см. формулу (1.2)), объединение по всем элементам несущего множества U. Знак интеграла показывает, что несущее множество, в отличие от формулы (1.2), является частью числовой оси. Поскольку объединение множеств называют также логической суммой (см., например, [13]), оба эти символа, $\int_{U_A} \mu_A(u)/u$ и $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ $(u_i \in U)$, будем читать *"сумма по множеству U "*.

Приведем примеры записи нечетких множеств с помощью различных символов.

1. $U = [33,42]$ – интервал температуры тела человека.

A – нормальная температура,

B – повышенная температура,

C – высокая температура,

D – очень высокая температура.

Функции принадлежности множеств A, B, C и D заданы графиками (рис. 1.3).

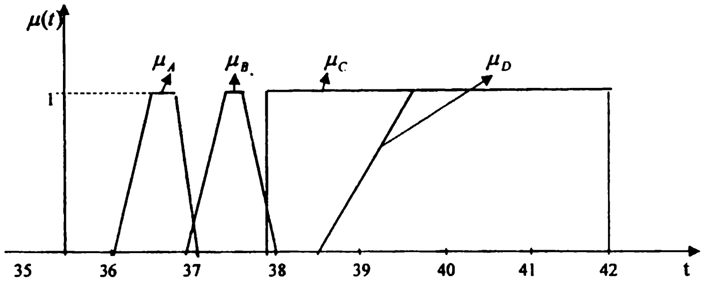


Рис. 1.3. Функции принадлежности нечетких множеств A, B, C и D

Каждый из графиков на рис. 1.3 соответствует определенной формуле:

$$\mu_A(t)=\begin{cases}\frac{10}{3}t-120, & 36\le t<36.3\\ 1, & 36.3\le t<36.8;\\ 185-5t, & 36.8\le t<37\end{cases}\quad \mu_B(t)=\begin{cases}2.5t-92, & 36.8\le t<37.2\\ 1, & 37.2\le t<37.6;\\ 95-2.5t, & 37.6\le t<38\end{cases}$$

$$\mu_C(t)=\begin{cases}5t-189, & 37.8\le t<38\\ 1, & 38\le t<42\end{cases};\quad \mu_D(t)=\begin{cases}t-38.5 & 38.5\le t<39.5\\ 1, & 39.5\le t<42\end{cases}.$$

Запишем множества A, B, C и D в форме сумм по их несущим множествам $U_A=[36{,}37)$, $U_B=[36.8{,}38)$, $U_C=[37.8{,}42)$, $U_D=[38.5{,}42]$:

$$A=\int\limits_{36\le t<37}\mu_A(t)/t=\int\limits_{36\le t<36.3}(\frac{10}{3}t-120)/t+\int\limits_{36.3\le t<36.8}1/t+\int\limits_{36.8\le t<37}(185-5t)/t;$$

$$B=\int\limits_{36.8\le t<38}\mu_B(t)/t=\int\limits_{36.8\le t<37.2}(2.5t-92)/t+\int\limits_{37.2\le t<37.6}1/t+\int\limits_{37.6\le t<38}(95-2.5t)/t;$$

$$C=\int\limits_{37.8\le t<42}\mu_C(t)/t=\int\limits_{37.8\le t<38}(5t-189)/t+\int\limits_{38\le t<42}1/t;$$

$$D=\int\limits_{38.5\le t\le 42}\mu_D(t)/t=\int\limits_{38.5\le t<39.5}(t-38.5)/t+\int\limits_{39.5\le t\le 42}1/t.$$

2. Игра в кости заключается в подбрасывании двух игральных костей – кубиков, на каждой грани которых выставлены очки от 1 до 6. Игрок делает следующие ставки: на выпадение числа очков от 2 до 4 он ставит 5 р., от 5 до 7 – 10 р., от 8 до 10 – 20 р., от 11 до 12 – 10 р. Пусть ставки, сделанные игроком,– это значения функции принадлежности нечеткому множеству A – "ожидаемое число очков, выпадающих при подбрасывании двух игральных костей". Носителем нечеткого множества A является множество: $U=\{2,3,4,...,12\}$.

Нормируем множество A, разделив все ставки на максимальную ставку – 20 р. Запишем множество A в трех различных формах:

1) табличной:

u_i – число выпавших очков	2,3,4	5,6,7	8,9,10	11,12
$\mu_A(u_i)$	0.025	0.5	1	0.5

;

2) в виде поэлементной суммы по множеству U:

$A = 0.025/2 + 0.025/3 + 0.025/4 + 0.5/5 + 0.5/6 + 0.5/7 + 0.5/11 + 0.5/12 + 1/8 + 1/9 + 1/10$;

3) как сумму по множеству U:

$$A = \sum_{i=2}^{12} \mu_A(u_i)/u_i = \sum_{i=2}^{4} 0.025/u_i + \sum_{i=5}^{7} 0.5/u_i + \sum_{i=5}^{10} 1/u_i + \sum_{i=11,12} 0.5/u_i .$$

В заключение дадим определения введенных понятий.

Определение 1.2. ***Нечетким множеством*** A называют пару $(U, \mu_A(u))$, где U – универсальное множество, $\mu_A(u)$ – функция, определенная на множестве U и принимающая значения на отрезке $[0,1]$. Функцию $\mu_A(u)$ называют ***функцией принадлежности*** нечеткого множества A.

Нечеткое множество A записывают в виде (1.2), если U дискретно, и в виде (1.3), если U непрерывно.

Определение 1.3. ***Несущим множеством*** или ***носителем*** нечеткого множества A называют подмножество множества U, состоящее из элементов, на которых $\mu_A(u)>0$.

В записях (1.2) и (1.3), как правило, указываются лишь элементы несущего множества.

Определение 1.4. ***Точкой перехода*** нечеткого множества A называют элемент множества U, на котором $\mu_A(u)=0.5$.

Точек перехода может быть несколько. Если эксперт, определяющий значения $\mu_A(u)$, затрудняется в выборе, то на этом элементе u несущего множества достигается максимальная нечеткость множества A и $\mu_A(u)=0.5$.

Определение 1.5. Нечеткое множество A называют ***нормальным***, если существует $u_0 (u_0 \in U)$ такое, что $\mu_A(u_0)=1$, и ***субнормальным*** в противном случае.

Субнормальное нечеткое множество A можно нормировать, разделив все значения $\mu_A(u)$ на $\sup\limits_U \mu_A(u)$. (Напомним, что $\sup\limits_U \mu_A(u)$ – это наименьшее из чисел s, для которых выполняется неравенство $s \ge \mu_A(u)$ для всех $u (u \in U)$.)

Определение 1.6. Функцию принадлежности $\mu_A(u)$ нечеткого множества A называют ***унимодальной***, если $\sup\limits_U \mu_A(u)$ достигается лишь в одной точке множества U.

1.2. Множества α-уровня

Определение 1.7. ***Множеством*** ***α-уровня*** нечеткого множества (U,μ_A) называют обычное множество, состоящее из всех тех элементов универсального множества U, для которых выполняется неравенство $\mu_A \geq \alpha$.

Множества α-уровня, как будет ясно в дальнейшем, широко используются при оперировании с нечеткими множествами. Это одно из важных понятий теории нечетких множеств.

Рассмотрим следующий пример, обращая особое внимание на используемую символику.

Пусть $A = 0.1/1 + 0.3/2 + 0.4/5 + 0.7/6 + 0.8/9 + 1/10$ и $\alpha \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$. Составим множества α-уровня для всех возможных значений α:

$$A^{0.1} = \{1,2,5,6,9,10\};$$

$$A^{0.3} = \{2,5,6,9,10\};$$

$$A^{0.5} = \{6,9,10\};$$

$$A^{0.7} = \{6,9,10\};$$

$$A^{0.9} = \{10\}.$$

Множество $0.1 \cdot A^{0.1} = \widetilde{A}^{0.1}$ – это нечеткое множество

$$\widetilde{A}^{0.1} = 0.1 \cdot A^{0.1} = 0.1/1 + 0.1/2 + 0.1/5 + 0.1/6 + 0.1/9 + 0.1/10$$

с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}^{0.1}} \equiv 0.1$.

Аналогично

$\widetilde{A}^{0.3} = 0.3 \cdot A^{0.3} = 0.3/2 + 0.3/5 + 0.3/6 + 0.3/9 + 0.3/10$, $\mu_{\widetilde{A}^{0.3}} \equiv 0.3$;

$\widetilde{A}^{0.5} = 0.5 \cdot A^{0.5} = 0.5/6 + 0.5/9 + 0.5/10$, $\mu_{\widetilde{A}^{0.5}} \equiv 0.5$;

$\widetilde{A}^{0.7} = 0.7 \cdot A^{0.7} = 0.7/6 + 0.7/9 + 0.7/10$, $\mu_{\widetilde{A}^{0.7}} \equiv 0.7$;

$\widetilde{A}^{0.9} = 0.9 \cdot A^{0.9} = 0.9/10$, $\mu_{\widetilde{A}^{0.9}} \equiv 0.9$.

Составим нечеткое множество $\widetilde{A}$, выполнив последовательно два действия:

1.Объединим множества $\widetilde{A}^{0.1}$, $\widetilde{A}^{0.3}$, $\widetilde{A}^{0.5}$, $\widetilde{A}^{0.7}$, $\widetilde{A}^{0.9}$:

$\widetilde{A}^{0.1} + \widetilde{A}^{0.3} + \widetilde{A}^{0.5} + \widetilde{A}^{0.7} + \widetilde{A}^{0.9} = 0.1 \cdot A^{0.1} + 0.3 \cdot A^{0.3} + 0.5 \cdot A^{0.5} + 0.7 \cdot A^{0.7} + 0.9 \cdot A^{0.9} =$

$=0.1/1+0.1/2+0.1/5+0.1/6+0.1/9+0.1/10+0.3/2+0.3/5+0.3/6+0.3/9+0.3/10+$
$+0.5/6++0.5/9+0.5/10+0.7/6+0.7/9+0.7/10+0.9/10=$
$=0.1/1+(0.1\vee 0.3)/2+(0.1\vee 0.3)/5+(0.1\vee 0.3\vee 0.5\vee 0.7)/6+(0.1\vee 0.3\vee 0.5\vee 0.7)/9+$
$+(0.1\vee 0.3\vee 0.5\vee 0.7\vee 0.9)/10.$

Примечание. Здесь и в дальнейшем символом *логической суммы* "$\vee$" будем обозначать операцию нахождения супремума.

2. Из значений функции принадлежности, соединенных знаками логических сумм, выберем наибольшее (супремум) и будем считать его значением функции принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$ на соответствующем элементе несущего множества:

$$\tilde{A}=0.1/1+0.3/2+0.3/5+0.7/6+0.7/9+0.9/10.$$

В данном случае $\tilde{A}\neq A$, так как $\mu_A(5)=0.4\neq\mu_{\tilde{A}}(5)=0.3$; $\mu_A(9)=0.8\neq\mu_{\tilde{A}}(9)=0.7$. Однако если бы множество значений α включало все значения функции принадлежности множества A, то множества A и $\tilde{A}$ совпали бы.

Подтвердим это следующим примером.

Пусть универсальным множеством является множество натуральных чисел $N=\{1,2,3,...\}$. Нечеткое множество A – числа примерно равные 5, причем

$$A=0.3/2+07/3+1/4+1/5+0.9/6+0.5/7+0.2/8+0.1/9.$$

Из этих данных следует, что несущим множеством является множество $U_A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, множеством значений функции принадлежности – $\mu_A(x)\in \mathrm{M}=\{0.1,0.2,0.3,0.5,0.7,0.9,1\}$.

Составим все множества α-уровня, где $\alpha\in\text{Ã}=\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1\}$:

$A^{0.1}=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $A^{0.2}=\{2,3,4,5,6,7,8\}$; $A^{0.3}=\{2,3,4,5,6,7\}$; $A^{0.6}=\{3,4,5,6\}$;
$A^{0.4}=\{3,4,5,6,7\}$; $A^{0.5}=\{3,4,5,6,7\}$; $A^{0.7}=\{3,4,5,6\}$; $A^{0.8}=\{4,5,6\}$;
$A^{0.9}=\{4,5,6\}$; $A^{1}=\{4,5\}$.

Обратим внимание на то, что $\mathrm{M}\subseteq\text{Ã}$.

Выпишем все множества α-уровня и соответствующие им нечеткие множества и затем объединим нечеткие множества:

$$+\begin{cases}\tilde{A}^{0.1}=0.1\cdot A^{0.1}=0.1/2+0.1/3+0.1/4+0.1/5+0.1/6+0.1/7+0.1/8+0.1/9\\ \tilde{A}^{0.2}=0.2\cdot A^{0.2}=0.2/2+0.2/3+0.2/4+0.2/5+0.2/6+0.2/7+0.2/8\\ \tilde{A}^{0.3}=0.3\cdot A^{0.3}=0.3/2+0.3/3+0.3/4+0.3/5+0.3/6+0.3/7\\ \tilde{A}^{0.4}=0.4\cdot A^{0.4}=0.4/3+0.4/4+0.4/5+0.4/6+0.4/7\\ \tilde{A}^{0.5}=0.5\cdot A^{0.5}=0.5/3+0.5/4+0.5/5+0.5/6+0.5/7\\ \tilde{A}^{0.6}=0.6\cdot A^{0.6}=0.6/3+0.6/4+0.6/5+0.6/6\\ \tilde{A}^{0.7}=0.7\cdot A^{0.7}=0.7/3+0.7/4+0.7/5+0.7/6\\ \tilde{A}^{0.8}=0.8\cdot A^{0.8}=0.8/4+0.8/5+0.8/6\\ \tilde{A}^{0.9}=0.9\cdot A^{0.9}=0.9/4+0.9/5+0.9/6\end{cases}$$

$$\tilde{A}=\sum_{\alpha=0.1}^{\alpha=1}\tilde{A}^{\alpha}=\sum_{\alpha=0.1}^{\alpha=1}\alpha\cdot A^{\alpha}=(0.1\vee 0.2\vee \boldsymbol{0.3})/2+(0.1\vee 0.2\vee 0.3\vee 0.4\vee 0.5\vee 0.6\vee \boldsymbol{0.7})/3+$$
$$+(0.1\vee 0.2\vee\ldots\vee \boldsymbol{1})/4+(0.1\vee 0.2\vee\ldots\vee \boldsymbol{1})/5+(0.1\vee 0.2\vee\ldots\vee \boldsymbol{0.9})/6+$$
$$+(0.1\vee 0.2\vee 0.3\vee 0.4\vee \boldsymbol{0.5})/7+(0.1\vee \boldsymbol{0.2})/8+\boldsymbol{0.1}/9.$$

Наконец, найдем логические суммы, выбирая в качестве их значений наибольшие слагаемые, выделенные жирным шрифтом:

$$\tilde{A}=0.3/2+0.7/3+1/4+1/5+0.9/6+0.5/7+0.2/8+0.1/9=A.$$

Итак,

$$A=\tilde{A}=\sum_{\alpha=0.1}^{\alpha=1}\tilde{A}^{\alpha}=\sum_{\alpha=0.1}^{\alpha=1}\alpha\cdot A^{\alpha}.$$

Очевидно, что аналогичный результат был бы получен и в том случае, если бы множества М и Ã были равны: М = Ã, т.е. α пробегала бы лишь те значения, которые принимает μ_A.

В общем случае, если носитель U_A нечеткого множества A является дискретным и $\mu_A(x)\in \mathrm{M}(x\in U_A)$, справедливо равенство

$$A=\sum_{\alpha\in\Lambda}\tilde{A}^{\alpha}=\sum_{\alpha\in\Lambda}\alpha\cdot A^{\alpha}, \tag{1.4}$$

где $\Lambda\supseteq \mathrm{M}$, умножение $\alpha\cdot A^{\alpha}$ есть присваивание элементам обычного множества A^{α} степени принадлежности α, иными словами, обращение его в нечеткое множество $\tilde{A}^{\alpha}$.

Представление нечеткого множества в виде (1.4) называют ***разложением нечеткого множества по множествам уровня***.

Если носитель нечеткого множества непрерывен, то разложение его по множествам уровня записывают с помощью интеграла:

$$A=\int_0^1\tilde{A}^{\alpha}=\int_0^1\alpha\cdot A^{\alpha}. \tag{1.5}$$

Как и ранее, оба символа $\sum_{\alpha\in\Lambda}\tilde{A}^{\alpha}=\sum_{\alpha\in\Lambda}\alpha\cdot A^{\alpha}$, $\int_0^1\tilde{A}^{\alpha}=\int_0^1\alpha\cdot A^{\alpha}$ будем читать так: "сумма множеств α уровня", понимая под этим объединение или логическую сумму множеств.

В заключение рассмотрим еще один, более сложный пример разложения нечеткого множества по множествам α-уровня.

Пусть имеем нечеткое множество A, носителем которого является отрезок числовой оси $x\in[1,3]$, а функция принадлежности имеет вид $\mu_A(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(\pi\cdot x))$ (рис. 1.4).

Множеством α-уровня является отрезок $[x_1,x_2]$, концы которого определяются из уравнения $\mu_A(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(\pi\cdot x))=\alpha$, $x\in[1,3]$. Решением такого уравнения будут два числа: $x_1=2-\frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)$ и $x_2=2+\frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)$. Следовательно, $\tilde{A}^{\alpha}=\alpha\cdot\left[\left(2-\frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)\right),\left(2+\frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)\right)\right]$.

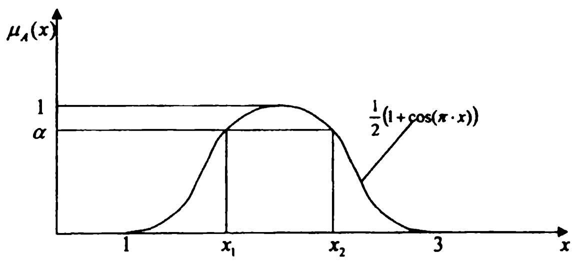


Рис.1.4. Множество α-уровня $A^{\alpha}=[x_1,x_2]$
для нечеткого множества A с функцией принадлежности
$\mu_A(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(\pi\cdot x))$

Разложение множества A по множествам уровня имеет вид

$$A=\int_0^1\alpha\cdot\left[\left(2-\frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)\right),\left(2-\frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)\right)\right].$$

Разбив отрезок $[0,1]$ на подходящее число частей, получают ***приближенное разложение нечеткого множества.***

Разобьем отрезок $[0,1]$ на 10 частей, получим дискретный набор значений $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, ..., 1\} = \{\frac{n}{10}\}, (n = 0, 1, ..., 10)$. Тогда приближенное разложение множества A по множествам уровня примет вид

$$A \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{n}{10} \cdot \left[\left(2 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{n-5}{5} \right), \left(2 + \frac{1}{\pi} \arccos \frac{n-5}{5} \right) \right].$$

1.3. Методы построения функций принадлежности

Наиболее уязвимым для критики вопросом теории нечетких множеств является вопрос о методах построения главной характеристики нечеткого множества – функции принадлежности. "Основной трудностью, мешающей интенсивному применению теории нечетких множеств при решении практических задач, является то, что функция принадлежности должна быть задана вне самой теории и, следовательно, ее адекватность не может быть проверена непосредственно средствами теории. В каждом известном методе построения функции принадлежности формулируются свои требования и обоснования к выбору именно такого построения" [12, с.259].

Вот почему в настоящее время, наряду с теорией нечетких множеств, разрабатываются и применяются другие способы работы с неполной, неточной, нечеткой информацией (см., например, [14]). В большинстве алгоритмов так называемых "мягких вычислений", кроме методов теории нечетких множеств, используются робастные, вероятностные, интервальные методы и т.п.

Основной класс методов построения функций принадлежности – методы экспертных оценок. При использовании этих методов следует учитывать, что имеются два типа свойств: свойства, которые можно непосредственно измерить, и свойства, которые являются качественными и требуют попарного сравнения объектов с целью определения их относительного места в ряду объектов, обладающих данным свойством. Важным является также и характер измерений (первичный или производный) и тип шкалы, в которой получают информацию от эксперта и которая определяет допустимый вид операций, применяемых к экспертной информации.

Построение функции принадлежности скорее является не математической, а психологической проблемой, связанной с индивидуальным восприятием свойств объектов. Методы построения функций принадлежности, основанные на математической психологии, подробно рассмотрены в работе [12].

Таблица 1.1

Функции принадлежности нечетких множеств "величина *x* мала"

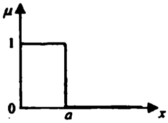
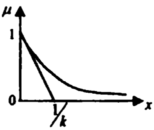
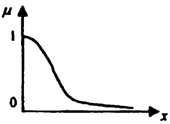
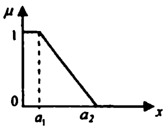
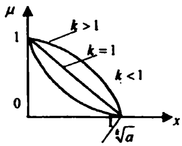
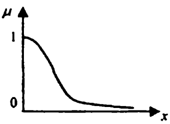
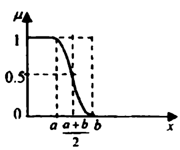
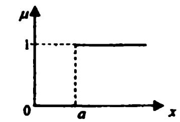
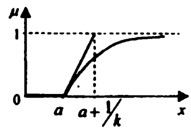
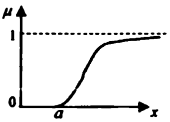
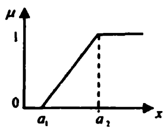
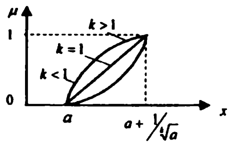
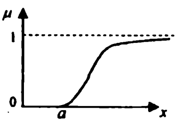
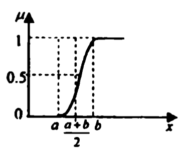
Универсальное множество	График функции принадлежности	Формула функции принадлежности
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x \le a \\ 0, & \text{если} \quad x > a \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = e^{-kx}, \quad k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = e^{-kx^2}, \quad k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x < a_1 \\ \dfrac{a_1 - x}{a_2 - a_1}, & \text{если} \quad a_1 \le x \le a_2 \\ 0, & \text{если} \quad a_2 < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1 - ax^k, & \text{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} \\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \dfrac{1}{1 + kx^2}, \quad k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x < a \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{b-a} \cdot \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)\right), & \text{если} \quad a \le x \le b \\ 0, & \text{если} \quad b < x \end{cases}$

Таблица 1.2

Функции принадлежности нечетких множеств "величина x большая"

Универсальное множество	График функции принадлежности	Формула функции принадлежности
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x \le a \\ 1, & \text{если } x > a \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < a \\ 1 - e^{-k(x-a)}, & \text{если } a \le x \end{cases}, \quad k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le a < x \\ 1 - e^{k(x-a)^2}, & \text{если } a \le x \end{cases}, \quad k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & \text{если } a_1 \le x \le a_2 \\ 1, & \text{если } a_2 < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < a \\ a(x-a)^k, & \text{если } a \le x \le a + \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} \\ 1, & \text{если } \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < a \\ \dfrac{k(x-a)^2}{1 + k(x-a)^2}, & \text{если } a \le x \end{cases}, \quad k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < a \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{b-a}\cdot\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)\right), & \text{если } a \le x \le b \\ 1, & \text{если } b < x \end{cases}$

При построении моделей, включающих теорию нечетких множеств, необходимо уделять особое внимание указанной проблеме. Но в дальнейшем мы будем считать, что выбор той или иной функции принадлежности обоснован и функция задана либо таблично, либо в виде графика, либо формулой.

В табл. 1.1 и 1.2 приведены таблицы наиболее часто используемых функций принадлежности для нечетких множеств "величина x мала", "величина x большая" [5]. Для нечетких множеств "величина $|x|$ мала" и "величина $|x|$ велика" в формулах функций принадлежности x заменяется на $|x|$, областью определения становится вся числовая ось, а график будет симметричным относительно оси ординат.

1.4. Меры нечеткости множества

Пусть U – универсальное множество. Очевидно, что "самое четкое" его подмножество – это обычное множество, функция принадлежности (характеристическая функция) которого принимает значения 0 или 1. "Самое нечеткое" подмножество – это множество, состоящее из точек перехода, в которых функция принадлежности принимает значение 0.5: $\mu(u) \equiv 0.5$.

Пусть A – какое-либо нечеткое подмножество U. Если $\mu_A(u_0)$ близко к 1 или 0, то вклад элемента u_0 в нечеткость множества A мал. Если же $\mu_A(u_0)$ близко к 0.5 или, что то же самое, значительно отличается как от 1, так и от 0, то его вклад в нечеткость A будет значителен.

Таким образом, вклад в нечеткость каждого элемента множества определяется близостью или отдаленностью значения функции принадлежности на этом элементе к числам 1 и 0. Естественно определить меру нечеткости всего множества как сумму вкладов каждого его элемента.

Исходя из этих соображений, мерой нечеткости множества A будет функция, которая множеству A ставит в соответствие определенное действительное число $d(A)$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1. $d(A)=0$ тогда и только тогда, когда A – обычное множество.

2. $d(A)$ принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда $\mu(u) \equiv 0.5$.

3. Если при любом $u (u \in U)$ функции принадлежности множеств A и B связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \mu_A(u) \le \mu_B(u), & \text{если} \quad \mu_B(u) < 0.5 \\ \mu_A(u) \ge \mu_B(u), & \text{если} \quad \mu_B(u) > 0.5, \\ \mu_A(u) - \text{ любое}, & \text{если} \quad \mu_B(u) = 0.5 \end{cases}$$

то

$$d(A) \le d(B).$$

4. Если $\mu_B(u) = 1 - \mu_A(u)$, то $d(A) = d(B)$. (Симметричность относительно точки перехода, в которой функции принадлежности принимают значение 0.5.)

Требования 1 – 4 называют ***аксиомами меры нечеткости***.

Чаще всего в качестве меры нечеткости выбирают ***расстояние от нечеткого множества*** A до ***ближайшего к нему обычного множества*** A_0.

Дадим определение понятия "обычное множество, ближайшее к нечеткому".

Определение 1.8. Обычным множеством, ближайшим к нечеткому множеству A с функцией принадлежности $\mu_A(u)$ $(u \in U)$, называют подмножество A_0 множества U, характеристическая функция которого имеет вид

$$\mu_{A_0} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mu_A > 0.5 \\ 0, & \text{если} \quad \mu_A < 0.5 \\ 1 \quad \text{или} \quad 0, & \text{если} \quad \mu_A = 0.5 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Геометрический смысл понятия "обычное множество A_0, ближайшее к нечеткому множеству A" иллюстрирует рис. 1.5.

Как видно из рисунка, справедливы неравенства:

$|\mu_A - \mu_{A_0}| < 0.5$, *если* $\mu_A > 0.5$ *или* $\mu_A < 0.5$;

$|\mu_A - \mu_{A_0}| = 0.5$, *если* $\mu_A = 0.5$, *независимо от того* $\mu_{A_0} = 1$ *или* $\mu_{A_0} = 0$.

Отметим, что если A – обычное множество, то оно является ближайшим к самому себе. Это следует непосредственно из определения 1.8.

Теперь необходимо договориться о том, каким образом определять расстояние между множествами (четкими и нечеткими). Функции принадлежности всех множеств на универсальном множестве U образуют функциональное множество **M**. Другими словами, **M** – это множество всех функций, определенных на U, и принимающих значения на отрезке $[0,1]$. Определить расстояние между элементами множества **M** – означает *наложить метрику* на это множество.

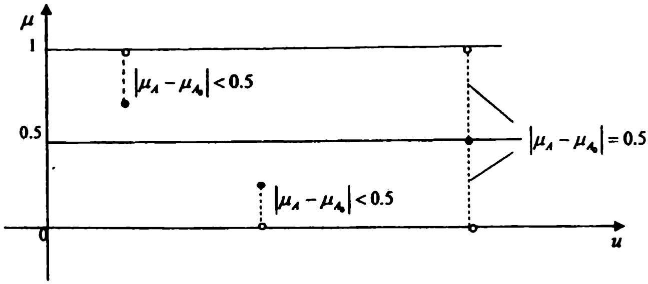


Рис. 1.5. Значения $|\mu_A - \mu_{A_0}|$ при различном расположении точек графиков функций: • – функция μ_A; ○ – функция μ_{A_0}

Метрика на каком-либо множестве X – это функция $\rho(x,y)$, сопоставляющая каждой паре элементов $x,y \in X$ действительное число, и обладающая следующими свойствами (аксиомы метрики):

1. Аксиома тождества: $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

2. Аксиома симметрии: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

3. Аксиома треугольника: $\rho(x,y) \geq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Значение $\rho(x,y)$ называют расстоянием между элементами x и y ($x,y \in X$). Напомним, что при изучении векторной алгебры рассматривались множества точек плоскости или пространства и для определения расстояний между точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ использовалась так называемая евклидова метрика:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Строго говоря, правило вычисления расстояний между элементами множества может быть задано любой формулой, лишь бы полученный результат удовлетворял аксиомам метрики. В функциональных пространствах наиболее часто используют два способа вычисления расстояний (табл. 1.3).

Мера нечеткости множества, определенная как расстояние от этого множества до ближайшего к нему обычного множества

$$d(A) = \rho(\mu_A, \mu_{A_0}) \quad (u_i \in U),$$

удовлетворяет аксиомам меры нечеткости, независимо от того, какая метрика (линейная или евклидова) при этом использована.

Таблица 1.3

Некоторые виды метрик функциональных пространств[1]

Вид метрики	Вид множества	
	U – дискретное множество, n число его элементов	$U=[a,b]$ – непрерывное множество
Линейное расстояние (расстояние Хемминга)	$\rho(\mu_A,\mu_B)=\sum_{i=1}^{n}\lvert\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\rvert$	$\rho(\mu_A,\mu_B)=\int_a^b\lvert\mu_A(x)-\mu_B(x)\rvert dx$
Евклидово расстояние	$\rho(\mu_A,\mu_B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}$	$\rho(\mu_A,\mu_B)=\sqrt{\int_a^b(\mu_A(x)-\mu_B(x))^2dx}$

Рассмотрим пример. Пусть даны нечеткие множества:

$A=0.3/1+0.5/2+0.2/3+0.7/4+0.6/5,$

$B=0.7/1+0.5/2+0.8/2+0.3/4+0.4/5,$

$C=0.5/1+0.5/2+0.5/3.$

Обратим внимание на то, что множества A и B удовлетворяют условию четвертой аксиомы меры нечеткости, т. е. их функции принадлежности симметричны относительно точки перехода 0,5: $\mu_A(u)=1-\mu_B(u),(u\in\{1,2,3,4,5\})$.

Согласно второй аксиоме меры нечеткости, самым нечетким множеством должно быть множество C, так как все значения μ_C равны 0.5. Найдем меры нечеткости множеств A,B и C, используя разные метрики. Для этого выполним последовательно следующие действия:

1) найдем обычные множества, ближайшие к A,B и C:

$A_0=0/1+0/2+0/3+1/4+1/5,$

$B_0=1/1+0/2+1/2+0/4+0/5,$

$C_0=0/1+0/2+0/3;$

2) вычислим меру нечеткости по линейной метрике:

$d^L(A)=|0.3-0|+|0.5-0|+|0.2-0|+|0.7-1|+|0.6-1|=1.7,$

$d^L(B)=|0.7-1|+|0.5-0|+|0.8-1|+|0.3-0|+|0.4-0|=1.7,$

$d^L(C)=|0.5-0|+|0.5-0|+|0.5-0|=1.5;$

3) вычислим меру нечеткости по метрике Евклида:

$d^E(A)=\sqrt{(0.3-0)^2+(0.5-0)^2+(0.2-0)^2+(0.7-1)^2+(0.6-1)^2}\approx 1.109,$

[1] Подчеркнем, что в табл.1.3 знаки суммы и интеграла означают именно сложение и интегрирование, но не объединение точечных множеств, как в разд. 1.1 и 1.2.

$$d^E(B)=\sqrt{(0.7-1)^2+(0.5-0)^2+(0.8-1)^2+(0.3-0)^2+(0.4-0)^2}\approx 1.109,$$

$$d^E(C)=\sqrt{(0.5-0)^2+(0.5-0)^2+(0.5-0)^2}\approx 0.866.$$

Как можно видеть, независимо от выбора метрики $d(A)=d(B)$, т.е. принятая мера удовлетворяет четвертой аксиоме меры нечеткости. Но мера нечеткости множества C оказалась при обеих метриках ниже, чем множеств A и B, что на первый взгляд противоречит второй аксиоме. Однако противоречие это только кажущееся, так как носитель множества C не равен носителю множеств A и B: $U_C=\{1,2,3\}$, $U_A=U_B=\{1,2,3,4,5\}$. Выйти из этого положения можно двумя способами: во-первых, можно дополнить носитель множества C элементами 4 и 5, на которых функция μ_C должна иметь "вполне четкие" значения – 0 (это объяснит, почему множества A и B являются более нечеткими, чем C); во-вторых, модифицировать выбранную меру нечеткости так, чтобы с ее помощью можно было сравнивать нечеткость множеств на различных носителях.

Чтобы с помощью $\rho(\mu_A,\mu_{A_0})$ можно было сравнивать нечеткие множества, имеющие различные носители, надо нормировать $\rho(\mu_A,\mu_{A_0})$, потребовав, чтобы для любого множества мера нечеткости не превышала какой-то определенный порог, например, 1. Нормированное расстояние $\rho(\mu_A,\mu_{A_0})$ между нечетким множеством A и ближайшим к нему обычным множеством называют ***индексом нечеткости*** и обозначают I_A. Запишем основные формулы вычисления индекса нечеткости (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Основные формулы вычисления индексов нечеткости множеств

Вид метрики	Вид множества	
	U – дискретное множество, n число его элементов	U =[a,b] – непрерывное множество
Линейное расстояние (расстояние Хемминга)	$I_A^L=\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\lvert\mu_A(x_i)-\mu_{A_0}(x_i)\rvert$	$I_A^L=\frac{2}{b-a}\cdot\int_a^b\lvert\mu_A(x)-\mu_{A_0}(x)\rvert dx$
Евклидово расстояние	$I_A^E=\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_{A_0}(x_i))^2}$	$I_A^E=\frac{2}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\int_a^b(\mu_A(x)-\mu_{A_0}(x))^2dx}$

Примечание. A_0 – обычное множество, ближайшее к нечеткому множеству A, $\mu_{A_0}(x)$ – характеристическая функция множества A_0, вычисляемая по формуле (1.6).

Применим формулы из табл.1.4 для вычисления индексов нечеткости множеств A, B и C, рассмотренных выше. Учитывая формулы табл.1.3 и выполненные ранее вычисления расстояний между этими множествами, получаем:

$$I_A^L = I_B^L = \frac{2}{5}\cdot 1.7 = 0.68, \qquad I_C^L = \frac{2}{3}\cdot 1.5 = 1,$$
$$I_A^E = I_B^E \approx \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 1.109 \approx 0.992, \qquad I_C^E \approx \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0.866 \approx 1.$$

Как и следовало ожидать, самое нечеткое множество – множество C – имеет самые большие индексы нечеткости.

Итак, чтобы ответить на вопрос "Какое из двух множеств более нечетко?", надо вычислить и сравнить индексы нечеткости этих множеств. Более нечетким является то множество, которое имеет больший индекс нечеткости.

Например, даны множества $A = 0.3/1 + 0.5/2 + 0.7/3 + 0.9/4 + 1/5$ и $B = 0.3/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 0.8/10$. Требуется оценить, какое из них более нечетко. Вычислим индексы нечеткости I^L и I^E множеств A и B. Для этого выполним ряд действий:

1) запишем обычные множества, ближайшие к A и B:

$A_0 = 0/1 + 0/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5$, $\quad B_0 = 0/7 + 0/8 + 1/9 + 1/4 + 1/10$;

2) вычислим индексы нечеткости, используя расстояние Хемминга:

$$I_A^L = \frac{2}{5}\cdot(|0.3-0| + |0,5-0| + |0.7-1| + |0.9-1| + |1-1|) = \frac{2.4}{5} = 0.48,$$

$$I_B^L = \frac{2}{4}\cdot(|0.3-0| + |0,5-0| + |0.8-1| + |0.8-1|) = \frac{2.4}{4} = 0.6;$$

3) вычислим индексы нечеткости, используя расстояние Евклида:

$$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{(0.3-0)^2 + (0.5-0)^2 + (0.7-1)^2 + (0.9-1)^2 + (1-1)^2} = 0.593,$$

$$I_B^E = \frac{2}{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{(0.3-0)^2 + (0.5-0)^2 + (0.8-1)^2 + (0.8-1)^2} = 0.648.$$

Множество B более нечетко, чем множество A, так как его индексы нечеткости при любой метрике больше соответствующих индексов множества A.

Рассмотрим, как решается вопрос о сравнении нечеткости множеств в случае, когда их носителями являются непрерывные множества. Пусть множества A и B, заданные на $U = R^+ \cup \{0\}$, являются множествами больших величин (см. табл. 1.2). Их функции принадлежности заданы графиками (рис.1.6)

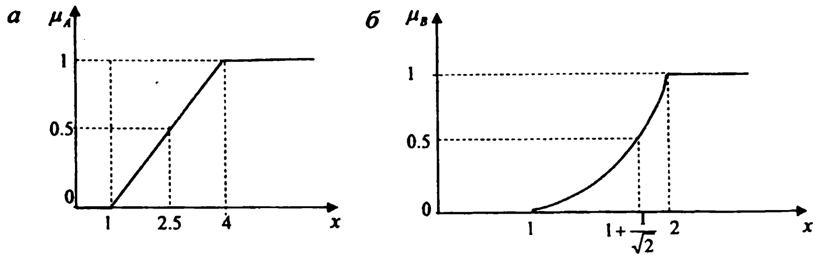


Рис.1.6. Графики функций принадлежности нечетких множеств:
а **– функция принадлежности множества** A; ***б*** **– функция принадлежности множества** B

Сравним нечеткость множеств A и B, для чего вычислим их индексы нечеткости, используя линейную метрику.

I. Вычислим индекс нечеткости множества A, выполнив приведенную ниже последовательность действий.

1) Запишем функцию принадлежности множества A:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad 0\le x<1\\ \dfrac{x-1}{4-1}, & \text{если} \quad 1\le x\le 4\\ 1, & \text{если} \quad 4<x\end{cases}.$$

2) Запишем характеристическую функцию обычного множества A_0, ближайшего к A. Как видно из графика, функция μ_A является неубывающей функцией с точкой перехода $x=2.5$. Следовательно, μ_{A_0} имеет вид

$$\mu_{A_0}(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad 0\le x<2.5\\ 1, & \text{если} \quad 2.5\le x\end{cases}.$$

3) Вычислим индекс нечеткости множества A, воспользовавшись формулой из табл. 1.4:

$$I_A^L=\frac{2}{b-a}\cdot\int_a^b\left|\mu_A(x)-\mu_{A_0}(x)\right|dx;$$

$$I_A^L=\frac{2}{4-1}\cdot\left(\int_1^{2.5}\left|\frac{x-1}{3}-0\right|\cdot dx+\int_{2.5}^{4}\left|\frac{x-1}{3}-1\right|\cdot dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\cdot\int_1^{2.5}x\cdot dx+\int_1^{2.5}dx\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\int_{2.5}^{4}x\cdot dx-4\cdot\int_{2.5}^{4}dx\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\left(\int_1^4 x\cdot dx + x\Big|_1^{2.5} - 4\cdot x\Big|_{2.5}^4\right)=\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 + 1.5 - 6\right)=\frac{2}{9}(8-0.5-4.5)=\frac{2}{3}=0.6667.$$

II. Вычислим индекс нечеткости множества B, выполняя аналогичную последовательность действий:

1) $\mu_B(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 0\le x<1 \\ (x-1)^2, & \text{если } 1\le x\le 2; \\ 1, & \text{если } 2<x \end{cases}$

2) $\mu_{B_0}(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 0\le x<1+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1, & \text{если } 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\le x \end{cases};$

3) $$I_B^L=\frac{2}{2-1}\cdot\left(\int_1^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\left|(x-1)^2-0\right|\cdot dx+\int_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2}\left|(x-1)^2-1\right|\cdot dx\right)=2\cdot\left(\int_1^2 (x-1)^2\cdot dx-\int_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} dx\right)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3\Big|_1^2 - x\Big|_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2}\right)=2\left(\frac{1}{3}-2+1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}+3\right)=0.0808.$$

Как можно видеть, нечеткость множества A значительно превышает нечеткость множества B.

Рассмотрим более подробно третью аксиому меры нечеткости. Пусть B – нечеткое множество, заданное на универсальном множестве U. Пусть также множество A удовлетворяет условию аксиомы 3:

$$\begin{cases} \mu_A(u)\le\mu_B(u), & \text{если } \mu_B(u)<0.5 \\ \mu_A(u)\ge\mu_B(u), & \text{если } \mu_B(u)>0.5. \\ \mu_A(u) - \text{любое}, & \text{если } \mu_B(u)=0.5 \end{cases}$$

Множество A, для которого справедлива указанная система неравенств, называют ***заострением множества*** B. На рис. 1.7 показан пример графиков функции принадлежности фиксированного множества B и его заострения A.

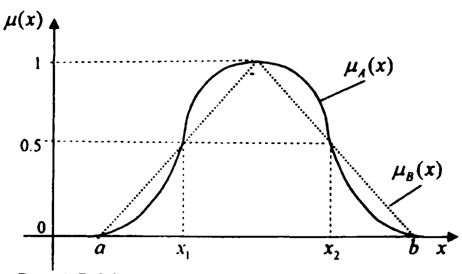


Рис. 1.7. Множество A – заострение множества B

Согласно аксиоме 3, если множество A является заострением множества B, то $d(\mu_A) \le d(\mu_B)$ и, следовательно, $I_A \le I_B$.

Пусть $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$, причем $\mu_A(u_i) \le 0.5$, $i = 1,2,...,n$. Тогда, $A^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu^2{}_A(u_i)/u_i$ является заострением множества A, поскольку для любого $u_i (u_i \in U)$ справедливо неравенство $\mu_A^2(u_i) \le \mu_A(u_i) \le 0.5$. Следовательно, $I_{A^2} \le I_A$ и множество A более нечеткое, чем A^2. Если $\mu_A(u_i) \ge 0.5$, $i = 1,2,...,n$ и $A^{0.5} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_A(u_i)}/u_i$, то $0.5 \le \mu_A(u_i) \le \sqrt{\mu_A(u_i)}$, A является заострением множества $A^{0.5}$. Следовательно, $I_A \le I_{A^{0.5}}$ и множество A менее нечеткое, чем $A^{0.5}$.

Очевидно, что если $0 \le \mu_A(u_i) \le 1$, то неравенства $\mu_A^2(u_i) \le \mu_A(u_i)$ и $\mu_A(u_i) \le \sqrt{\mu_A(u_i)}$ продолжают выполняться, но множества A^2 и $A^{0.5}$ могут быть как более нечеткими, чем A, так и менее нечеткими. В самом деле, линейные индексы нечеткости этих множеств имеют вид

$$I_A^L = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i) \right| = \frac{2}{n} \left(\sum_{\substack{j \\ \mu_A(x_j) \le 0.5}} \mu_A(x_j) + \sum_{\substack{k \\ \mu_A(x_k) > 0.5}} (1 - \mu_A(x_k)) \right),$$

$$I_{A^2}^L = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \mu^2{}_A(x_i) - \mu_{A^2_0}(x_i) \right| = \frac{2}{n} \left(\sum_{\substack{j \\ \mu_A^2(x_j) \le 0.5 \\ \mu_A \le \sqrt{0.5}}} \mu^2{}_A(x_j) + \sum_{\substack{k \\ \mu_A^2 > 0.5 \\ \mu_A > \sqrt{0.5}}} (1 - \mu^2{}_A(x_k)) \right),$$

$$I_{A^{0.5}}^L = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{\mu_A(x_i)} - \mu_{A_0^{0.5}}(x_i) \right| = \frac{2}{n} \left(\sum_{\substack{j \\ \sqrt{\mu_A(x_j)} \le 0.5 \\ \mu_A \le 0.5^2}} \sqrt{\mu_A(x_j)} + \sum_{\substack{k \\ \sqrt{\mu_A} > 0.5 \\ \mu_A > 0.5^2}} (1 - \sqrt{\mu_A(x_k)}) \right).$$

После некоторых преобразований приведенных выше формул получаем условие 1, при котором A более нечетко, чем A^2, и условие 2, при котором A более нечетко, чем $A^{0.5}$:

1. Если выполнено неравенство

$$\sum_{\mu_j \le 0.5} \mu_j \cdot (1 - \mu_j) + \sum_{0.5 < \mu_j \le \frac{1}{\sqrt{2}}} (0.5 - \mu_j^2) \ge \sum_{\mu_j > \frac{1}{\sqrt{2}}} \mu_j (1 - \mu_j) + \sum_{0.5 < \mu_j \le \frac{1}{\sqrt{2}}} (\mu_j - 0.5),$$

то $I_A^L \ge I_{A^2}^L$ и A более нечетко, чем A^2.

2. Если выполнено неравенство

$$\sum_{\mu_j \le 0.25} \sqrt{\mu_j} \cdot (1-\sqrt{\mu_j}) + \sum_{0.25<\mu_j \le 0.5} (\sqrt{\mu_j} - 0.5) \ge \sum_{\mu_j > 0.5} \sqrt{\mu_j}(1-\sqrt{\mu_j}) + \sum_{0.25<\mu_j \le 0.5} (0.5-\mu_j),$$

то $I_A^L \ge I_{A^{0.5}}^L$, и A более нечетко, чем $A^{0.5}$.

Примечание. Для сокращения записей использовано обозначение $\mu_A(x_j) \equiv \mu_j$. Суммирование ведется по всем элементам универсального множества U, для которых выполняются неравенства, записанные под знаком $\sum$.

Переход от множества A к множеству A^2 называют ***операцией концентрирования множества*** A, а переход от A к $A^{0.5}$ – ***операцией растяжения множества*** A. Применяются следующие обозначения:

$$CON(A) = A^2, \quad (1.7)$$

$$DIL(A) = A^{0.5}. \quad (1.8)$$

Обе эти операции используются в работе с лингвистическими переменными и в нечеткой логике.

1.5. Отношение включения нечетких множеств

Напомним, что если A и B – обычные множества, то A есть ***подмножество*** B тогда и только тогда, когда каждый элемент множества A является элементом B. Диаграмма Эйлера–Венна является графическим способом иллюстрации отношений между множествами и операций над ними (рис. 1.8).

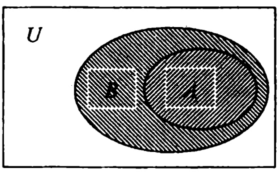


Рис. 1.8. Диаграмма Эйлера–Венна

Универсальное множество изображено прямоугольником, его подмножества – кругами или овалами. Множество A является подмножеством множества B: $A \subseteq B$.

Отношение множества и подмножества называют ***отношением включения.*** Запись $A \subseteq B$ читается так: "A включено в B" или "B включает A".

Обратим внимание на то, что любое множество A является подмножеством самого себя: $A \subseteq A$, поскольку все элементы A являются элементами A. Если выполняются включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B равны: $A = B$.

Характеристическая функция подмножества при любых значениях аргумента не превосходит характеристическую функцию множества. Характеристические функции равных множеств равны при любом значении x. Верны также и обратные утверждения:

1. Если для любого $x \in U$ справедливо $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$, то $A \subseteq B$.
2. Если для любого $x \in U$ справедливо $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, то $A = B$.

Понятие включения и равенства множеств естественным образом обобщаются на случай нечетких множеств. Пусть задано дискретное ($U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$) или непрерывное ($U = [a,b]$) универсальное множество.

Определение 1.8. Нечеткое множество $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ $\left(A = \int_U \mu_A(u)/u\right)$ называют ***подмножеством*** множества $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$ $\left(B = \int_U \mu_B(u)/u\right)$, если для любого элемента u универсального множества U выполняется неравенство

$$\mu_A(u) \le \mu_B(u). \tag{1.9}$$

Как и в случае с обычными подмножествами, если для любого элемента u универсального множества U выполняется равенство $\mu_A(u) = \mu_B(u)$, то $A = B$. При чтении записи $A \subseteq B$ используются термины "A включено в B" или "B включает A".

Если $(\forall u, u \in U)\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ и $(\exists u, u \in U)\mu_A(u) \ne \mu_B(u)$, то включение называют строгим: $A \subset B$, а подмножество A – правильной частью B.

Вместо диаграмм Эйлера–Венна для геометрической иллюстрации отношений между нечеткими множествами служат графики функций принадлежности (рис. 1.9, 1.10).

Универсальное множество U можно рассматривать как нечеткое множество, функция принадлежности которого тождественно равна 1, а пустое множество $\varnothing$ – как нечеткое множество, функция принадлежности которого тождественно равна 0. В этом случае все обычные и нечеткие подмножества, определенные на U, включая U и $\varnothing$, образуют ***множество всех нечетких подмножеств множества*** U. Будем обозначать это множество символом $\Im$.

Множество U является наибольшим множеством в $\Im$, а $\varnothing$ – наименьшим. Если $A \subseteq B$, то говорят, что A не больше, чем B. Таким образом, отношение включения на множестве $\Im$ устанавливает порядок, т.е. делает $\Im$

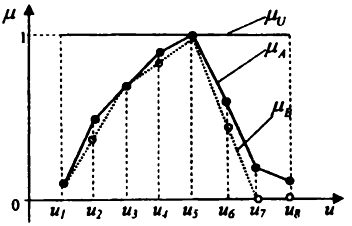


Рис. 1.9. Функции принадлежности нечетких множеств $B \subset A \subset U$

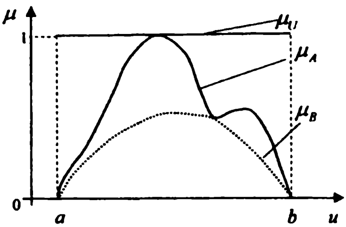


Рис. 1.10. Функции принадлежности нечетких множеств $B \subset A \subset U$

упорядоченным множеством. Однако порядок этот частичный: существуют множества, не сравнимые друг с другом по отношению включения: $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $A \neq B$ (см. рис. 1.7).

1.6. Операции над нечеткими множествами

Операции над обычными множествами были изучены в курсе дискретной математики.

Напомним определение алгебраической операции, заданной на каком-либо множестве X (например, на множестве действительных чисел).

Двуместной или бинарной алгебраической операцией на множестве X называют соответствие, по которому каждой паре (a,b) элементов множества X сопоставляется определенный элемент c множества X.

Например, бинарными алгебраическими операциями на множестве действительных чисел R являются сложение и умножение: для любых двух действительных чисел (a,b) найдется единственное число c, которое является их суммой, и единственное число d, которое является их произведением: $a+b=c$, $\quad a \cdot b = d$, $\quad a,b,c,d \in R$.

Одноместной или унарной алгебраической операцией на множестве X называют соответствие, по которому каждому элементу a множества X сопоставляется определенный элемент b множества X. Например, унарной алгебраической операцией на множестве действительных чисел R является нахождение противоположного числа: для любого числа a найдется единственное противоположное число $-a$.

В первую очередь рассмотрим три основные алгебраические операции на множестве $\Im$ всех нечетких подмножеств множества U:

1) дополнение $\overline{A}$;

2) пересечение $A \cap B$;

3) объединение $A \cup B$.

Определения этих операций над обычными и нечеткими множествами, а также геометрические иллюстрации к определениям даны в табл. 1.5.

Определения операций над нечеткими множествами записаны для случая дискретного универсального множества. Если же U непрерывно, то результаты выполнения этих операций должны быть записаны следующим образом:

1) дополнение: $\overline{A} = \int_U (1-\mu_A(u))/u$;

2) пересечение: $A \cap B = \int_U \min(\mu_A(u), \mu_B(u))/u$;

3) объединение: $A \cup B = \int_U \max(\mu_A(u), \mu_B(u))/u$.

Рассмотрим несколько примеров выполнения этих операций.

Примеры

1. Пусть $U = \{1,2,...10\}$, $A = 0.8/3+1/5+0.6/6$, $B = 0.7/3+1/4+0.5/6$.

$\overline{A} = (1-0)/1+(1-0)/2+(1-0.8)/3+(1-0)/4+(1-1)/5+(1-0.6)/6+(1-0)/7+(1-0)/8+(1-0)/9+(1-0)/10 =$
$= 1/1+1/2+0.2/3+1/4+0/5+0.4/6+1/7+1/8+1/9+1/10$.

Обратим внимание на то, что в записи нечеткого множества A участвуют лишь элементы несущего множества $\{3,5,6\}$, т.е. подмножества U, на котором значения функции принадлежности μ_A больше нуля. На подмножестве $\{1,2,4,7,8,9,10\}$ $\mu_A(u)=0$. Следовательно, согласно формулам (см. табл. 1.5) на этих элементах $\mu_{\overline{A}}(u)=1$.

Учитывая это замечание, запишем $\overline{B}$:

$\overline{B} = 1/1+1/2+0.3/3+1/5+0.5/6+1/7+1/8+1/9+1/10$. Выполним, в соответствии с формулами (см. табл. 1.5) другие операции над множествами A и B:

$A \cap B = 0.7/3+0.5/6$;

$A \cup B = 0.8/3+1/4+1/5+0.6/6$;

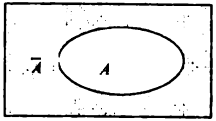
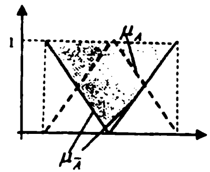
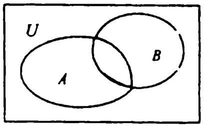
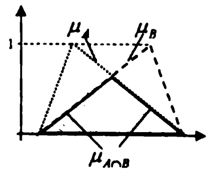
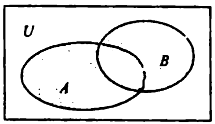
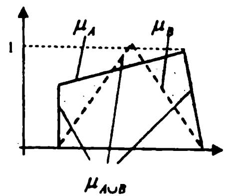
$\overline{A} \cap A = 0.2/3+0.4/6 \neq \varnothing$;

$\overline{B} \cup B = 1/1+1/2+0.7/3+1/4+1/5+0.5/6+1/7+1/8+1/9+1/10 \neq U$.

Подчеркнем, что пересечение нечеткого множества со своим дополнением может не быть пустым ($\overline{A} \cap A \neq \varnothing$), а объединение – не составлять универсальное множество ($\overline{B} \cup B \neq U$).

Таблица 1.5

Операции над обычными и нечеткими множествами

<table>
<tr><th colspan="3">Обычные множества</th><th colspan="2">Нечеткие множества</th></tr>
<tr><th>Определение</th><th>Диаграмма Эйлера – Венна</th><th>Таблицы и формулы характеристической функции</th><th>Определение</th><th>Графическое пояснение</th></tr>
<tr>
<td>Дополнением множества A называют множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества U, которые не принадлежат множеству A</td>
<td>
</td>
<td><table><tr><th>μ_A</th><th>$\mu_{\overline{A}}$</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A$</td>
<td>Дополнением нечеткого множества $A = \sum_U \mu_A(u_i)/u_i$ называют множество $\overline{A} = \sum_U (1 - \mu_A(u_i))/u_i$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Пересечением множеств A и B называют множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B</td>
<td>
</td>
<td><table><tr><th>μ_A</th><th>μ_B</th><th>$\mu_{A\cap B}$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A, \mu_B) = \mu_A \cdot \mu_B$.</td>
<td>Пересечением нечетких множеств $A = \sum_U \mu_A(u_i)/u_i$ и $B = \sum_U \mu_B(u_i)/u_i$ называют нечеткое множество $A \cap B = \sum_U \min(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))/u_i$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Объединением множеств A и B называют множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые либо принадлежат множеству A, либо множеству B, либо обоим множествам</td>
<td>
</td>
<td><table><tr><th>μ_A</th><th>μ_B</th><th>$\mu_{A\cup B}$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A, \mu_B) = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B$.</td>
<td>Объединением нечетких множеств $A = \sum_U \mu_A(u_i)/u_i$ и $B = \sum_U \mu_B(u_i)/u_i$ называют нечеткое множество $A \cup B = \sum_U \max(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))/u_i$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

2. Множества A – "величина x велика" и B – "величина x мала" заданы на отрезке [0,6]. Их функции принадлежности

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & если \quad 0\le x<1\\ \dfrac{x-1}{3}, & если \quad 1\le x\le 4\\ 1, & если \quad 4<x\le 6\end{cases} \quad и \quad \mu_B(x)=\begin{cases}1, & если \quad 0\le x<1\\ \dfrac{3-x}{2}, & если \quad 1\le x\le 3\\ 0, & если \quad 3<x\le 6\end{cases}$$

показаны на рис. 1.

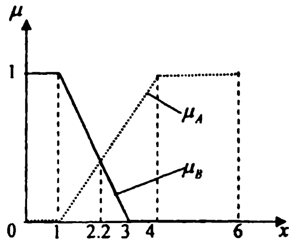


Рис.1

Выполним над множествами A и B ряд операций.

1) *Дополнения множеств A и B.*

Воспользуемся формулой $\overline{A}=\int_U (1-\mu_A(u))/u$. Функции принадлежности $\mu_{\overline{A}}$, $\mu_{\overline{B}}$ и их графики (рис.2 и 3) в соответствии с этой формулой имеют вид

$$\mu_{\overline{A}}(x)=\begin{cases}1-0, & если \quad 0\le x<1\\ 1-\dfrac{x-1}{3}, & если \quad 1\le x\le 4\\ 1-1, & если \quad 4<x\le 6\end{cases}=\begin{cases}1, & если \quad 0\le x<1\\ \dfrac{4-x}{3}, & если \quad 1\le x\le 4\\ 0, & если \quad 4<x\le 6\end{cases},$$

$$\mu_{\overline{B}}(x)=\begin{cases}1-1, & если \quad 0\le x<1\\ 1-\dfrac{3-x}{2}, & если \quad 1\le x\le 3\\ 1-0, & если \quad 3<x\le 6\end{cases}=\begin{cases}0, & если \quad 0\le x<1\\ \dfrac{x-1}{2}, & если \quad 1\le x\le 3\\ 1, & если \quad 3<x\le 6\end{cases}.$$

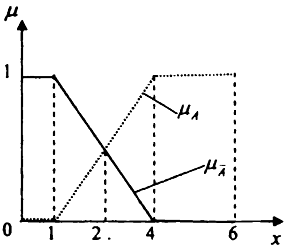


Рис.2.

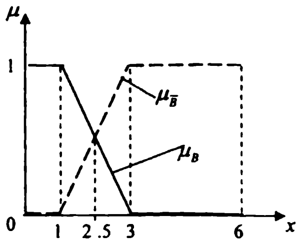


Рис. 3.

В результате получаем $\overline{A}=\int_0^1 1\cdot x+\int_1^4 \frac{4-x}{3}\cdot x$, $\overline{B}=\int_1^3 \frac{x-3}{2}\cdot x+\int_3^6 1\cdot x$.

2) *Объединение множеств* A *и* B.

Воспользуемся формулой $A \cup B = \int\limits_U \max(\mu_A(u), \mu_B(u)) / u$.

График функции принадлежности $\mu_{A \cup B}$ в соответствии с этой формулой имеет вид, представленный на рис. 4.

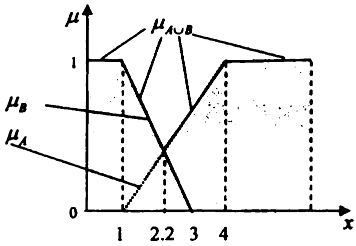


Рис. 4.

Найдем функцию принадлежности объединения множеств A и B:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} \max(1,0) = 1, & \text{если} \quad 0 \le x < 1 \\ \max\left(\dfrac{x-1}{3}, \dfrac{3-x}{2}\right) = \dfrac{3-x}{2}, & \text{если} \quad 1 \le x < 2.2 \\ \max\left(\dfrac{x-1}{3}, \dfrac{3-x}{2}\right) = \dfrac{x-1}{3}, & \text{если} \quad 2.2 \le x < 4 \\ \max(1,0) = 1, & \text{если} \quad 4 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{3-x}{2}, & \text{если} \quad 1 \le x < 2.2 \\ \dfrac{x-1}{3}, & \text{если} \quad 2.2 \le x < 4 \\ 1, & \text{если} \quad 4 \le x \le 6 \end{cases}$$

В результате получаем

$$A \cup B = \int\limits_0^1 1 \cdot x + \int\limits_1^{2.2} \frac{3-x}{2} \cdot x + \int\limits_{2.2}^4 \frac{x-1}{3} \cdot x + \int\limits_4^6 1 \cdot x.$$

3) *Пересечение множеств* A *и* $\overline{B}$.

Воспользуемся формулой

$$A \cap B = \int\limits_U \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) / u.$$

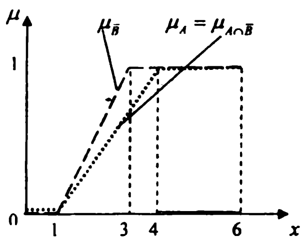


Рис. 5

График функции принадлежности $\mu_{A\cap\bar{B}}(x)$ представлен на рис. 5. Обратим внимание на то, что $A \subseteq \bar{B}$, так как $\mu_A(x) \le \mu_{\bar{B}}(x), (x \in [0.6])$.

Найдем функцию принадлежности пересечения множеств A и $\bar{B}$.

$$\mu_{A\cap\bar{B}}(x) = \begin{cases} \min(0,0) = 0, & \text{если } 0 \le x < 1 \\ \min\left(\frac{x-1}{3}, \frac{x-1}{2}\right) = \frac{x-1}{3}, & \text{если } 1 \le x < 3 \\ \min\left(\frac{x-1}{3}, 1\right) = \frac{x-1}{3}, & \text{если } 3 \le x < 4 \\ \min(1,1) = 1, & \text{если } 4 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ \frac{x-1}{3} & 1 \le x \le 4 = \mu_A(x) \\ 1 & 4 < x \le 6 \end{cases}$$

Итак, $A \subseteq \bar{B}$, $\mu_A(x) = \mu_{A\cap\bar{B}}(x)$ и $A \cap \bar{B} = A$.

Примечание. Вывод о том, что $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$, носит общий характер и справедлив как для нечетких, так и для обычных множеств.

4) *Объединение множеств* $\bar{A}$ *и* B.

График функции принадлежности $\mu_{\bar{A}\cup B}$ показан на рис. 6. Обратим внимание на то, что $B \subseteq \bar{A}$, так как $\mu_B(x) \le \mu_{\bar{A}}(x), (x \in [0.6])$.

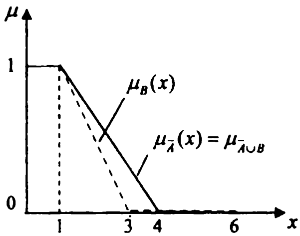


Рис. 6

Найдем функцию принадлежности объединения множеств $\bar{A}$ и B.

$$\mu_{\bar{A}\cup B}(x) = \begin{cases} \max(1,1) = 1, & \text{если } 0 \le x < 1 \\ \max\left(\frac{4-x}{3}, \frac{3-x}{2}\right) = \frac{4-x}{3}, & \text{если } 1 \le x < 3 \\ \max\left(\frac{4-x}{3}, 0\right) = \frac{4-x}{3}, & \text{если } 3 \le x < 4 \\ \max(0,01) = 1, & \text{если } 4 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x < 1 \\ \frac{4-x}{3}, & \text{если } 1 \le x \le 4 = \mu_{\bar{A}}(x). \\ 0, & \text{если } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

Итак, $B \subseteq \bar{A}$, $\mu_B(x) \le \mu_{\bar{A}}(x)$ и $\bar{A} \cap B = \bar{A}$.

Примечание. Вывод о том, что $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$, носит общий характер и справедлив как для нечетких, так и для обычных множеств.

Пусть $\Im$ – множество всех подмножеств (обычных и нечетких), заданных на универсальном множестве U. Пусть также $\bar{\mathrm{U}}$ ($\bar{\mathrm{U}} \subset \Im$) – множество всех обычных подмножеств U. Подчеркнем, что любое обычное множество можно рассматривать как нечеткое, функцией принадлежности которого является его характеристическая функция. Если выполнять операции объединения, пересечения и дополнения в $\bar{\mathrm{U}}$, то и результат этих операций не выйдет за пределы $\bar{\mathrm{U}}$. Большинство свойств операций, выполняемых в $\bar{\mathrm{U}}$, присущи этим операциям и во всем множестве $\Im$. Операции объединения, пересечения и дополнения в $\Im$ обладают следующими свойствами (табл.1.6).

Таблица 1.6

Свойства операций пересечения, объединения и дополнения над обычными и нечеткими множествами

№ п/п	Название свойства	Свойства пересечения	Свойства объединения
1	Коммутативность	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
2	Ассоциативность	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3	Дистрибутивность	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения)
4	Свойство нуля	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
5	Свойство единицы	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
6	Идемпотентность	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
7	Свойство поглощения	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
8	Законы де Моргана	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
9	Свойство порядка	$A \cap B \subseteq A$ *и* $A \cap B \subseteq B$	$A \subseteq A \cup B$ *и* $B \subseteq A \cup B$

Покажем справедливость некоторых равенств, приведенных в табл. 1.6, для нечетких множеств. (Случай обычных множеств рассматривается в курсе дискретной математики.) Возьмем для примера свойство поглощения для пересечения и закон де Моргана для объединения.

Поглощение $A \cap (A \cup B) = A$

Поскольку A и B определены на одном и том же универсальном множестве U, равенство будет верным, если для любого $x \in U$ справедливо $\mu_{A \cap (A \cup B)}(x) = \mu_A(x)$.

Покажем справедливость этого равенства.

$$\mu_{A\cap(A\cup B)}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_{A\cup B}(x)=\min(\mu_A(x),\max(\mu_A(x),\mu_B(x))=$$

$$=\begin{cases}\min(\mu_A(x),\mu_A(x))=\mu_A(x), & \text{если} \quad \mu_A(x)\ge\mu_B(x)\\ \min(\mu_A(x),\mu_B(x))=\mu_A(x), & \text{если} \quad \mu_A(x)<\mu_B(x)\end{cases}.$$

Итак, какое бы из двух возможных соотношений $\mu_A(x)\ge\mu_B(x)$ или $\mu_A(x)<\mu_B(x)$ ни выполнялось, $\mu_{A\cap(A\cup B)}(x)=\mu_A(x)$.

Равенство доказано.

Закон де Моргана $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

Покажем справедливость равенства $\mu_{\overline{A\cup B}}(x)=\mu_{\overline{A}\cap\overline{B}},(x\in U)$.

$$\mu_{\overline{A\cup B}}(x)=1-\max(\mu_A(x),\mu_B(x))=\begin{cases}1-\mu_A(x), & \text{если} \quad \mu_A(x)\ge\mu_B(x)\\ 1-\mu_B(x), & \text{если} \quad \mu_A(x)<\mu_B(x)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\mu_{\overline{A}}(x), & \text{если} \quad 1-\mu_A(x)\le 1-\mu_B(x)\\ \mu_{\overline{B}}(x), & \text{если} \quad 1-\mu_A(x)>1-\mu_B(x)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\mu_{\overline{A}}(x), & \text{если} \quad \mu_{\overline{A}}(x)\le\mu_{\overline{B}}(x)\\ \mu_{\overline{B}}(x), & \text{если} \quad \mu_{\overline{A}}(x)>\mu_{\overline{B}}(x)\end{cases}=\min(\mu_{\overline{A}}(x),\mu_{\overline{B}}(x))=\mu_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x).$$

В цепочке равенств были использованы простейшие свойства числовых неравенств: $a\ge b\Rightarrow 1-a\le 1-b$, $a<b\Rightarrow 1-a>1-b$.

Аналогично доказываются и остальные свойства операций (см. табл. 1.6).

Для нечетких множеств нарушаются два закона, имеющих большое значение как в теории множеств, так и в логике. В логике эти законы называют ***законом исключения третьего*** ($A\cup\overline{A}=U$) и ***законом противоречия*** ($A\cap\overline{A}=\varnothing$).

Именно нарушение этих законов и определяет своеобразие теории нечетких множеств. Если для обычных множеств и обычной логики может быть справедливым только либо A, либо *не*$A=\overline{A}$, то для нечетких множеств и логики имеют право на существование и другие варианты. Если в теории обычных множеств и обычной логики A и *не*$A=\overline{A}$ полностью исключают друг друга, то для нечетких множеств и логики они могут существовать совместно.

Подтвердим сказанное примером.

Пусть $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=0.3/1+0.5/2+0.7/3+1/4+0/5$.

Тогда

$$\overline{A}=(1-0.3)/1+(1-0.5)/2+(1-07)/3+(1-1)/4+(1-0)/5=$$
$$=0.7/1+0.5/2+0.3/3+0/4+1/5.$$

Найдем $A\cup\overline{A}$, $A\cap\overline{A}$ и покажем, что равенства $A\cup\overline{A}=U$ и $A\cap\overline{A}=\varnothing$ нарушены.

Найдем $A \cup \bar{A}$, $A \cap \bar{A}$ и покажем, что равенства $A \cup \bar{A} = U$ и $A \cap \bar{A} = \varnothing$ нарушены.

$$A \cup \bar{A} = \max(0.3,0.7)/1 + \max(0.5,0.5)/2 + \max(0.7,0.3)/3 +$$
$$+ \max(1,0)/4 + \max(0,1)/5 = 0.7/1 + 0.5/2 + 0.7/3 + 1,0/4 + 1/5 \neq U,$$
$$A \cap \bar{A} = \min(0.3,0.7)/1 + \min(0.5,0.5)/2 + \min(0.7,0.3)/3 +$$
$$+ \min(1,0)/4 + \min(0,1)/5 = 0.3/1 + 0.5/2 + 0.3/3 + 0/4 + 0/5 = 0.3/1 + 0.5/2 + 0.3/3 \neq \varnothing.$$

Множество с двумя бинарными операциями, которые обладают свойствами идемпотентности, коммутативности, ассоциативности и поглощения, в общей алгебре называют ***решеткой*** [1]. В общем случае решеточные операции называют ***решеточным пересечением*** и ***решеточным объединением***. Используются обозначения: $\{P, \wedge, \vee\}$ – решетка, P – множество, $\wedge$ – знак решеточного пересечения, $\vee$ – знак решеточного объединения.

Множество $\Im$ всех подмножеств (обычных и нечетких), заданных на универсальном множестве U, с операциями пересечения ($\cap$) и объединения ($\cup$) (см. табл. 1.5) образует решетку, так как эти операции обладают четырьмя необходимыми свойствами (см. табл. 1.6).

Кроме решетки $\{\Im, \cap, \cup\}$, на множестве $\Im$ могут быть заданы и другие решетки, в которых решеточное объединение и решеточное пересечение определены по иному [11,14]. Определить различными способами решеточное пересечение и решеточное объединение позволяют так называемые T-нормы (триангулярные нормы) и T-конормы. Приведем формулы для наиболее типичных T-норм и соответствующих им T-конорм (табл. 1.7).

Таблица 1.7

Типичные T-нормы и T-конормы

№ п/п	Типичные T-нормы	Соответствующие T-конормы
1	Логическое произведение $T_M(x,y) = \min(x,y)$	Операция максимум $S_M(x,y) = \max(x,y)$
2	Алгебраическое произведение $T_P(x,y) = x \cdot y$	Вероятностная сумма $S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$
3	Граничное произведение $T_L(x,y) = \max(x + y - 1,0)$	Граничная сумма $S_L(x,y) = \min((x + y),1)$
4	Слабая T-норма $T_W(x,y) = \begin{cases} y, & \text{если } x = 1 \\ x, & \text{если } y = 1 \\ 0, & \text{во всех других случаях} \end{cases}$	Сильная T-конорма $S_W(x,y) = \begin{cases} y, & \text{если } x = 0 \\ x, & \text{если } y = 0 \\ 1, & \text{во всех других случаях} \end{cases}$

Пусть $A=\sum_U \mu_A(u_i)/u_i$ и $B=\sum_U \mu_B(u_i)/u_i,(u_i\in U)$. Используя различные типы T-норм и T-конорм (см. табл. 1.7), получаем следующие виды операций пересечения ($\wedge$) и соответствующего объединения ($\vee$) на множестве $\Im$:

1) $A\wedge B=\sum_U T_M(\mu_A(u_i),\mu_B(u_i))/u_i$, $A\vee B=\sum_U S_M(\mu_A(u_i),\mu_B(u_i))/u_i$;

2) $A\wedge B=\sum_U T_P(\mu_A(u_i),\mu_B(u_i))/u_i$, $A\vee B=\sum_U S_P(\mu_A(u_i),\mu_B(u_i))/u_i$;

3) $A\wedge B=\sum_U T_L(\mu_A(u_i),\mu_B(u_i))/u_i$, $A\vee B=\sum_U S_L(\mu_A(u_i),\mu_B(u_i))/u_i$;

4) $A\wedge B=\sum_U T_W(\mu_A(u_i),\mu_B(u_i))/u_i$, $A\vee B=\sum_U S_W(\mu_A(u_i),\mu_B(u_i))/u_i$.

Примечание. Первый вид операций пересечения и объединения, определенный через логическое умножение и операцию максимум (см. табл. 1.7), есть операции пересечения и объединения обычных и нечетких множеств, определенные ранее (см. табл. 1.5).

Можно проверить, что какие бы T-нормы и соответствующие T-конормы ни были использованы в определениях операций пересечения ($\wedge$) и объединения ($\vee$), $\{\Im,\wedge,\vee,\}$ сохранит структуру решетки. Иными словами, каким бы из перечисленных выше способов ни были определены пересечения и объединения нечетких множеств, все утверждения, которые справедливы для решеток, будут справедливы и для $\{\Im,\wedge,\vee,\}$.

В теории нечетких множеств в качестве триангулярных норм наиболее часто используются логическое и алгебраическое произведения. Если операция пересечения определена через логическое произведение, то она является ***жесткой*** в том смысле, что в ней недостаточно учитываются функции принадлежности обоих множеств. В противоположность этому операция пересечения, определенная через алгебраическое произведение, является ***мягкой***. Как определить пересечение, зависит от смысла, вкладываемого в эту операцию в конкретной задаче.

Кроме операций пересечения, объединения и дополнения над нечеткими множествами можно определить и другие операции.

1. *Умножение*: $AB=\sum_{u_i\in U}\mu_A(u_i)\cdot\mu_B(u_i)/u_i$ или $AB=\int_U \mu_A(u)\cdot\mu_B(u)/u$.

Если A и B – обычные множества ($A,B\in \bar{U}$), то операция умножения и операция пересечения есть одна и та же операция (см. табл. 1.5). Если же A и B – два нечетких множества, эта операция является операцией пересечения с

T_P-нормой и результат такой операции не совпадает с результатом операции пересечения, определенным по T_M-норме. Частным случаем операции умножения является операция умножения на число.

2. *Умножение на число*:

$$a \cdot A = \sum_{u_i \in U} a \cdot \mu_A(u_i)/u_i \text{ или } a \cdot A = \int_U a \cdot \mu_A(u)/u \text{, при условии } a \cdot \sup_u \mu_A(u) \le 1.$$

Умножение множества на число имеет аналоги в линейной алгебре. Можно говорить о ***выпуклой комбинации нечетких множеств*** $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$A = \sum_U \mu_A(u_i)/u_i,$$

где $\mu_A(u) = w_1 \cdot \mu_{A_1}(u) + w_2 \cdot \mu_{A_2}(u) + ... + w_n \cdot \mu_{A_n}(u)$, $w_1, w_2, ..., w_n$ – числовые коэффициенты линейной комбинации, $0 \le w_i \le 1$ $(i = 1,2,..., n)$, $\mu_1(u) + \mu_2(u) + ... + \mu_n(u) \le 1$, $0 \le \mu_i(u) \le 1$ $(u \in U,\ i = 1,2,...,n)$.

Понятие выпуклой линейной комбинации нечетких множеств оказывается полезным при описании таких лингвистических неопределенностей как "существенно", "типично" и т.п.

3. *Возведение в целую неотрицательную степень*:

$$A^a = \sum_U (\mu_A(u))^a / u \text{ или } A^a = \int_U (\mu_A(u))^a / u \text{, где } a \in N \tag{1.10}$$

Если $a \in R_+$, то формула (1.10) определяет операцию ***возведения нечеткого множества в степень***. Частными случаями этой операции являются операция концентрирования и операция растяжения, рассмотренные в разд. 1.5 (см. формулы (1.7) и (1.8)).

На множестве $\Im$ используется ***оператор нечеткости*** K, который служит для преобразования обычных множеств в нечеткие и для увеличения нечеткости нечетких множеств. В случае дискретного универсального множества U задать такой оператор можно в виде матрицы, определяющей результат его действия на каждый элемент множества U.

Пусть, к примеру, $U = \{1,2,3,4\}$ – универсальное множество.

На $\Im_U$ задан оператор увеличения нечеткости

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix}.$$

Действие оператора K на какое-либо множество

$$A = \mu_A(1)/1 + \mu_A(2)/2 + \mu_A(3)/3 + \mu_A(4)/4$$

из $\Im_U$ заключается в следующем.

Элемент $\mu_A(1)/1$ преобразуется в нечеткое множество A_1:

$$\mu_A(1)/1 \to A_1 = \mu_A(1)\cdot k_{11}/1 + \mu_A(1)\cdot k_{21}/2 + \mu_A(1)\cdot k_{31}/3 + \mu_A(1)\cdot k_{41}/4 = \sum_{i=1}^{4}(\mu_A(1)\cdot k_{i1})/i.$$

Аналогично

$$\mu_A(2)/2 \to A_2 = \mu_A(2)\cdot k_{12}/1 + \mu_A(2)\cdot k_{22}/2 + \mu_A(2)\cdot k_{32}/3 + \mu_A(2)\cdot k_{42}/4 = \sum_{i=1}^{4}(\mu_A(2)\cdot k_{i2})/i;$$

$$\mu_A(3)/3 \to A_3 = \mu_A(3)\cdot k_{13}/1 + \mu_A(3)\cdot k_{23}/2 + \mu_A(3)\cdot k_{33}/3 + \mu_A(3)\cdot k_{43}/4 = \sum_{i=1}^{4}(\mu_A(3)\cdot k_{i3})/i;$$

$$\mu_A(4)/4 \to A_4 = \mu_A(4)\cdot k_{14}/1 + \mu_A(4)\cdot k_{24}/2 + \mu_A(4)\cdot k_{34}/3 + \mu_A(4)\cdot k_{44}/4 = \sum_{i=1}^{4}(\mu_A(4)\cdot k_{i4})/i.$$

Обратим внимание на то, что единице в каждом из множеств A_1, A_2, A_3 и A_4 соответствует произведение первой строки матрицы K на столбец $(\mu_A(1), \mu_A(2), \mu_A(3), \mu_A(4))^T$, двойке – произведение второй строки K и т.д.

Затем множества A_1, A_2, A_3 и A_4 объединяются по какому-либо из правил объединения нечетких множеств, например, по правилу логической конормы $S_M(x, y) = \max(x, y)$:

$$KA = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 =$$
$$= \sum_{i=1}^{4}(\mu_A(1)\cdot k_{i1})/i + \sum_{i=1}^{4}(\mu_A(2)\cdot k_{i2})/i + \sum_{i=1}^{4}(\mu_A(3)\cdot k_{i3})/i + \sum_{i=1}^{4}(\mu_A(4)\cdot k_{i4})/i =$$
$$= \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}(\mu_A(j)\cdot k_{ij})/i = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(\mu_A(j)\cdot k_{ij})/i.$$

(Последнее равенство справедливо, поскольку объединение нечетких множеств коммутативно и ассоциативно).

Таким образом, если $A \in \Im$ – множество (обычное или нечеткое), $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_3\}$ – универсальное множество и K – оператор нечеткости, действующий в $\Im$, то результат действия оператора K на множество A есть нечеткое множество $KA \in \Im$, причем $\mu_{KA}(u_i) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\mu_A(u_j)$:

$$KA = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\mu_A(u_j)/u_i \qquad (1.11)$$

Рассмотрим пример выполнения действий с оператором нечеткости.

Пусть $U=\{a,b,c\}$,

$$K=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7 & 1\\ 0.7 & 0.5 & 0\\ 0,8 & 0.6 & 0.5\end{pmatrix},\ A=\{a,c\},\ B=0.3/a+0.7/b+0.9/c,\ C=0.5/a+0.5/b+0.5/c.$$

Найдем множества KA, KB и KC:

$$KA=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7 & 1\\ 0.7 & 0.5 & 0\\ 0.8 & 0.6 & 0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\max(0.3,1)/a+0.7/b+\max(0.8,0.5)/c=1/a+0.7/b+0.8/c;$$

$$KB=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7 & 1\\ 0.7 & 0.5 & 0\\ 0.8 & 0.6 & 0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.3\\ 0.7\\ 0.9\end{pmatrix}=\max(0.09,0.49,0.9)/a+\max(0.21,0.35)/b+\max(0.24,0.42,0.45)/c=$$

$$=0.9/a+0.35/b+0.42/c.$$

$$KC=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7 & 1\\ 0.7 & 0.5 & 0\\ 0.8 & 0.6 & 0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5\\ 0.5\\ 0.5\end{pmatrix}=0.5/a+0.35/b+0.4/c.$$

Примечание1. Обратим внимание на то, что индекс нечеткости $J_{KC}=\frac{2}{3}(|0.5-0|+|0.35-0|+|0.4-0|)\approx 0.83$ множества KC меньше индекса нечеткости $J_C=\frac{2}{3}(|0.5-0|+|0.5-0|+|0.5-0|)=1$ множества C (см. табл. 1.4), т.е. действие оператора K на *нечеткое* множество не обязательно ведет к увеличению нечеткости последнего.

Операция увеличения нечеткости, введенная Л.Заде [4], играет важную роль при рассмотрении таких лингвистических неопределенностей, как "более или менее", "слегка", "несколько" и т.п.

Еще один пример действий с оператором нечеткости.

Пусть $U=\{2006,2005,2004,2003\}$;

A – недавно: $A=1/2006+0.8/2005+0.7/2004$;

K – более или менее: $K=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0.9 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0.9 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.8 & 0\end{pmatrix}$.

Найдем множество KA – более или менее недавно:

$$KA=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0.9&1&0&0\\0&0.9&1&0\\0&0&0.8&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0.8\\0.7\\0\end{pmatrix}=1/2006+\max(0.9,0.8)/2005+$$

$$+\max(0.72,0.7)/2004+0.56/2003=1/2006+0.9/2005+0.72/2004+0.56/2003.$$

Примечание 2. Как уже было отмечено (см. примеч. 1), действие оператора K на нечеткое множество не обязательно ведет к увеличению нечеткости последнего. В то же время любые обычные множества, функции принадлежности которых состоят из нулей и единиц, превращаются под действием этого оператора в нечеткие множества. Именно с этой точки зрения, данный оператор и можно называть оператором увеличения нечеткости.

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть U={*понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье*}. Выступая в роли эксперта, запишите в форме (1.2) следующие нечеткие множества: A – начало недели, B – середина недели, C – конец недели, D – не начало, но и не конец недели. Есть ли среди определенных Вами функций принадлежности унимодальные?

2. Пусть $U=\{0,1,2,...,120\}$ – возможный возраст человека.

1) Выступая в роли эксперта, постройте графики функций принадлежности следующих нечетких множеств: A – молодой, B – старый, C – очень молодой, D – не старый.

2) Запишите множества A, B, C и D в форме (1.3).

3) Сравните полученные Вами графики с графиками Ваших коллег и объясните причины различий, если они имеются.

3. Игра состоит в двукратном подкидывании игрального кубика. На каждую сумму s выпавших очков (от s=2 до s=12) делается ставка, причем сумма всех ставок не превышает 100 у.е.

1) Запишите свои ставки на каждое значение s.

2) Выясните, совпадают ли сделанные Вами ставки с вероятностями (в процентах) выпадения соответствующих сумм.

3) Рассматривая сделанные Вами ставки как функцию принадлежности нечеткого множества B – *ожидаемая сумма выпавших очков при двукратном подбрасывании игральной кости*, выполните следующие задания:

а) нормируйте множество B;

б) запишите B в форме (1.2);

в) запишите несущее множество;

г) запишите в виде таблицы ряд распределения вероятностей случайной величины s, дополнив его строкой нормированной функции принадлежности.

Можно ли рассматривать вероятности $p(s)$ как функцию принадлежности $\mu_B(s)$ нечеткому множеству B? Можно ли, наоборот, рассматривать $\mu_B(s)$ как вероятности соответствующих значений s? Обоснуйте свое суждение.

4. Пусть U – множество дисциплин, изучаемых Вами в текущем семестре.

1) Присвойте номер каждой дисциплине и, выступая в роли эксперта, запишите нечеткие множества: A – мне нравится эта дисциплина, B – я не понимаю эту дисциплину, C – мне не нравится эта дисциплина, D – я хотел бы изучать эту дисциплину глубже.

2) Представьте разложения каждого из нечетких множеств по множествам уровня.

5. $U = R^{+} \cup \{0\}$ – множество неотрицательных действительных чисел. Заданы функции принадлежности нечетких множеств A, B, C и D:

а) $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x \le 5 \\ 0, & \text{если} \quad x > 5 \end{cases}$; б) $\mu_B(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-5}{5}}, & \text{если} \quad 5 \le x \le 10 \\ 0, & \text{если} \quad 0 \le x < 5 \quad \text{или} \quad x > 5 \end{cases}$,

в) $\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x < a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{если} \quad a_1 \le x \le a_2 \\ 1, & \text{если} \quad x > a_2 \end{cases}$; г) $\mu_D(x) = \dfrac{1}{1+2x^2}, \quad 0 \le x < \infty$.

Для каждого нечеткого множества:

1) постройте график функции принадлежности;

2) запишите разложение по множествам уровня;

3) запишите приближенное дискретное разложение, разбив отрезок [0,1] на 5 частей.

6. Пусть U – цены автомобилей, $4 \le u \le 5000$ (у.е.).

1) Выступая в роли эксперта, постройте графики функций принадлежности следующих нечетких множеств:

A – цены автомобилей для среднего класса,

B – цены автомобилей для богатых людей,

C – цены автомобилей для небогатых людей.

2) Для каждой кривой найдите подходящую формулу и запишите функции принадлежности аналитически (см. табл. 1.1, 1.2).

3) Запишите разложение по множествам уровня каждого из нечетких множеств.

4) Запишите приближенное дискретное разложение, разбив отрезок $[0,1]$ на 10 равных частей.

7. Даны нечеткие множества: $A = 0.4/5 + 0.7/6 + 1/7 + 0.8/8 + 0.6/9$ и $B = 0.8/1 + 1/2 + 0.8/3 + 0.5/4$.

1) Запишите множества $CON(A)$, $DIL(A)$, $CON(B)$, $DIL(B)$.

2) Сделайте два чертежа: на одном изобразите множества A, $CON(A)$, $DIL(A)$, на втором – множества B, $CON(B)$, $DIL(B)$.

3) Вычислите индексы нечеткости по метрике Хемминга для всех 6 множеств.

4) Вычислите индексы нечеткости по евклидовой метрике для всех 6 множеств.

5) Сравните степень нечеткости множества A со степенью нечеткости множеств $CON(A)$, $DIL(A)$, а также множества B с множествами $CON(B)$, $DIL(B)$.

8. A – нечеткое множество, заданное на $U = R^+ \cup \{0\}$, с функцией принадлежности $\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)), & если \quad x \le 2 \\ 0, & если \quad 2 > x \end{cases}$ (см. табл. 1.1).

1) Запишите множества $CON(A)$ и $DIL(A)$.

2) Постройте графики функций принадлежности множеств A, $CON(A)$, $DIL(A)$.

3) Вычислите индексы нечеткости по метрике Хемминга для всех 3 множеств.

4) Сравните степень нечеткости множества A со степенью нечеткости множеств $CON(A)$, $DIL(A)$.

9. Докажите, что для любого нечеткого множества A справедливо утверждение: $CON(A) \subseteq A \subseteq DIL(A)$.

10. На универсальном множестве $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ заданы нечеткие множества:

$A=0.3/b+0.7/c+1/d+0.2/f+0.6/g,$

$B=0.3/a+1/b+0.5/c+0.8/d+1/e+0.5/f+0.6/g,$.

$C=1/a+0.5/b+0.5/c+0.2/d+0.2/f+0.9/g.$

1) Найдите множества: $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $(A\cup\overline{B})\cap C$, $\overline{(A\cap B)}\cap\overline{C}$, $(A\cap\overline{A})\cdot(B\cap\overline{B})$, дайте геометрическую интерпретацию выполненных операций.

2) Найдите множества: $0.8A^2\cup 0{,}5B^2\cup 0.3C^2$, $0.6(A\cdot B)\cap C^2$.

3) Найдите множества: $A\wedge B$, $B\vee C$, $(A\vee C)\wedge B$, $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$, если операции решеточных пересечения и объединения определены по правилам:

а) граничного произведения и граничной суммы;

б) слабой T-нормы и сильной T-конормы.

11. На универсальном множестве $U=[0,3]$ заданы нечеткие множества $A=\int\limits_U \frac{u^2}{9}/u$ и $B=\int\limits_U \frac{(u-3)^2}{9}/u$.

1) Постройте графики функций принадлежности множеств A и B.

2) Запишите множества: $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $A\cup\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$, $(A\cap\overline{A})\cdot(B\cap\overline{B})$ и постройте графики их функций принадлежности.

12. Пусть $U=\{a,b,c,d,e\}$ – множество молодых людей. На U задано нечеткое множество $A=0.8/a+0.6/c+0.9/d+1/e$, где *A – молодой человек хорошо владеет компьютером.*

1) Используя операции концентрирования и растяжения, запишите множества: *B=CONA – молодой человек очень хорошо владеет компьютером, C=DILA – молодой человек не слишком хорошо владеет компьютером.*

2) Запишите множество C, используя оператор увеличения нечеткости:

$$K=\begin{pmatrix} 0.9 & 1 & 0.6 & 0\\ 0.8 & 0.6 & 0.4 & 1\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1\\ 0.2 & 0.5 & 0.8 & 0\\ 1 & 0.7 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА

2.1. Определение нечеткого числа

Рассмотрим простейшую задачу. В студенческой столовой чай стоит примерно 7 р., пирожок – примерно 10 р. Сколько денег приближенно будет стоить такой завтрак?

В задаче использованы 2 нечетких числа: $a = \{\textit{примерно } 7\}$, $b = \{\textit{примерно } 10\}$. Надо найти их сумму: $a + b = \{\textit{примерно } 7 + \textit{ примерно } 10\}$. Нечеткие числа a и b можно рассматривать как нечеткие множества A и B, заданные экспертом (в данном случае студентом). Пусть они имеют вид

$$A = 0.3/5 + 0.8/6 + 1/7 + 0.7/8,\ B = 0.7/9 + 1/10 + 0.6/11 + 0.8/12.$$

Сумма $a+b$ также будет нечетким множеством, носитель которого состоит из всевозможных сумм чисел, входящих в несущие множества $U_a = \{5,6,7,8\}$ и $U_b = \{9,10,11,12\}$: $U_{a+b} = \{5+9, 5+10, \ldots, 8+12\} = \{14,15,16,17,18,19,20\}$. Встает вопрос: как по известным функциям принадлежностей a и b найти функцию принадлежности $a+b$?

Применим следующий подход. Каждой паре слагаемых (a_i, b_j) поставим в соответствие минимальное из чисел μ_{a_i} и μ_{b_j}: $\mu_{a_i+b_j} = \min(\mu_{a_i}, \mu_{b_j})$, а затем объединим полученные одноточечные нечеткие множества $\mu_{a_i+b_j}/(a_i+b_j)$ по правилу логической T-конормы. Эти действия удобно оформить в виде таблицы, в клетке (i,j) которой, т. е. в клетке, стоящей на пересечении i-й строки и j-го столбца, записано одноточечное множество $\mu_{a_i+b_j}/(a_i+b_j) = \min(\mu_{a_i}, \mu_{b_j})/(a_i+b_j)$:

μ_{a_i}/a_i μ_{b_j}/b_j	0.3/5	0.8/6	1/7	0.7/8
0.7/9	0.3/14	0.7/15	0.7/16	0.7/17
1/10	0.3/15	0.8/16	1/17	0.7/18
0.6/11	0.3/16	0.6/17	0.6/18	0.7/19
0.8/12	0.3/17	0.8/18	0.8/19	0.7/20

Далее клетки, в которых $(a_i + b_j)$ имеют равное значение, отметим одинаковой раскраской и, наконец, объединим одноточечные множества, попавшие в клетки с одинаковой раскраской. Получим

$$a+b=0.3/14+\max(0.3,0.7)/15+\max(0.7,0.8,0.3)/16+\max(0.7,0.6,0.3)/17+$$

$$+\max(0.7,0.6,0.8)/18+\max(0.7,0.8)/19+0.7/20=$$

$$=0.3/14+0.7/15+0.8/16+1/17+0.8/18+0.8/19+0.7/20.$$

В рассмотренной задаче нечеткие числа были натуральными. Обобщим понятие нечеткого числа на множество всех действительных чисел.

Определение 2.1. ***Нечетким числом*** a называют нечеткое подмножество A множества действительных чисел R.

Множество R является универсальным множеством, его промежуток $[a_1,a_2]$ (отрезок или интервал) – носителем множества A, на R задана функция принадлежности нечеткого числа $\mu_a(x)$ $(x\in R,\mu_a(x)\in[0,1])$, принимающая над (a_1,a_2) положительные значения, а в остальных точках числовой оси равная нулю. Множество всех функций, принимающих значения на отрезке $[0,1]$, в дальнейшем будем обозначать символом $\Im(R)$.

Таким образом, множество нечетких чисел – это пара $(R,\Im(R))$, где $\Im(R)$ – множество всех отображений (функций) множества R в отрезок $[0,1]$.

Определение 2.2. Нечеткое число a называют ***нормальным нечетким числом***, если $\max\limits_{x\in R}\mu_a(x)=1$.

Определение 2.3. Нечеткое число a называют ***унимодальным нечетким числом***, если $\mu_a(x)$ достигает своего наибольшего значения либо в единственной точке числовой оси, либо на непрерывном подмножестве числовой оси.

Определение 2.4. Нечеткое число a называют ***выпуклым нечетким числом***, если для любых действительных чисел x, y и z из неравенства $x\le y\le z$ следует неравенство $\mu_a(y)\ge\min(\mu_a(x),\mu_a(z))$.

С нечеткими числами можно выполнять те же операции, что и с обычными числами, а именно:

1) сравнение;

2) сложение, вычитание;

3) умножение, деление.

Желательно также, чтобы над множеством нечетких чисел были определены основные элементарные функции: степенные, логарифмические, тригонометрические и т.п.

2.2. Алгебраические операции над нечеткими числами

Пусть даны два нечетких числа a и b, представляющие собой нечеткие множества: $A=\{U_a,\mu_a(x),x\in U_a\}$ и $B=\{U_b,\mu_b(x),x\in U_b\}$, где $U_a\subseteq R, U_b\subseteq R$ – носители множеств A и B. При выполнении операций над числами всегда будем пользоваться логическими T-нормой и T-конормой:

$$A\cap B=\int_R \min(\mu_A(x),\mu_B(x))/x\,,\quad A\cup B=\int_R \max(\mu_A(x),\mu_B(x))/x\,.$$

Дадим определения арифметических операций над числами a и b.

Определение 2.5. ***Суммой (разностью) нечетких чисел*** a и b называют нечеткое множество $a+b=\int\limits_{u=x\pm y}\min(\mu_a(x),\mu_b(y))/u$.

Определение 2.6. ***Произведением нечетких чисел*** a и b называют нечеткое множество $a\cdot b=\int\limits_{u=x\cdot y}\min(\mu_a(x),\mu_b(y))/u$.

Определение 2.7. ***Частным нечетких чисел*** a и b называют нечеткое множество $a:b=\int\limits_{u=x:y(y\neq 0)}\min(\mu_a(x),\mu_b(y))/u$.

Порядок выполнения каждой из этих четырех операций достаточно прост: найти одноточечные нечеткие множества: $\min(\mu_a(a_i),\mu_b(b_j))/(a_i * b_j)$, а затем объединить их. (Символом "*" обозначена любая из четырех арифметических операций.) Однако практическое выполнение этих действий в общем случае оказывается столь сложным, что приходится резко ограничивать класс функций принадлежности для того, чтобы применять нечеткие числа в математических моделях.

Сравнение нечетких чисел в общем случае также оказывается трудно выполнимым. Отношения "больше", "меньше", "равно" во множестве нечетких чисел определяются через операции ***нечеткий максимум*** и ***нечеткий минимум***.

Определение 2.8. Нечеткое число c называют ***нечетким максимумом*** $c=\widetilde{\max}(a,b)$ чисел a и b, если функция принадлежности $\mu_c(z)$ этого числа удовлетворяет равенству $\mu_c(z)=\max\limits_{z=\max(x,y)}\left(\min(\mu_a(x),\mu_b(y))\right)$ $(x,y\in R)$.

Определение 2.9. Нечеткое число c называют ***нечетким минимумом*** $c=\widetilde{\min}(a,b)$ чисел a и b, если функция принадлежности $\mu_c(z)$ этого числа удовлетворяет равенству $\mu_c(z)=\max\limits_{z=\min(x,y)}\left(\min(\mu_a(x),\mu_b(y))\right)$ $(x,y\in R)$.

Определение 2.10. Нечеткое число a ***не больше числа*** b $(a \le b)$ если a есть нечеткий минимум чисел a и b: $a = \widetilde{\min}(a,b)$.

Определение 2.11. Нечеткое число b ***не меньше числа*** a $(b \ge a)$, если b есть нечеткий максимум чисел a и b: $b = \widetilde{\max}(a,b)$.

Рассмотрим пример нахождения нечеткого максимума для чисел $a = \{$*примерно* $7\}$ и $b = \{$*примерно* $10\}$, если $A = 0.3/5 + 1/7 + 0.7/8$ и $B = 0.7/9 + 1/10 + 0.6/11 + 0.8/12$. Согласно определению 2.8, нечеткое число c является нечетким максимумом чисел a и b, если функция принадлежности $\mu_c(z)$ этого числа удовлетворяет равенству $\mu_c(z) = \max\limits_{z=\max(x,y)}\left(\min(\mu_a(x),\mu_b(y))\right)$ $(x,y \in R)$. Поскольку в данном примере носителями нечетких множеств A и B являются множества $U_A = \{5,7,8\}$ и $U_B = \{9,10,11,12\}$, соответственно нечеткое число $\widetilde{\max}(a,b)$ представляет собой нечеткое множество

$$\widetilde{\max}(a,b) = \sum_{j=1}^{4} \max\left(\sum_{i=1}^{3} (\min(\mu_i, \mu_j)/\max(a_i, b_j)\right).$$

Используя эту формулу, оформим решение в виде таблицы:

j	μ_j/b_j	μ_i/a_i: 0.3/5, $i=1$	μ_i/a_i: 1/7, $i=2$	μ_i/a_i: 0.7/8, $i=3$	$\widetilde{\max}(a,b) = \sum_{j=1}^{4}\max\left(\sum_{i=1}^{3}(\min(\mu_i,\mu_j)/\max(a_i,b_j)\right)$
1	0.7/9	$\min(0.3,0.7)/\max(5,9) = 0.3/9$	$\min(1,0.7)/\max(7,9) = 0.7/9$	$\min(0.7,0.7)/\max(8,9) = 0.7/9$	$\max\limits_{j=1}(0.3,0.7,0.7)/\max(9,9,9) = 0.7/9$
2	1/10	$\min(0.3,1)/\max(5,10) = 0.3/10$	$\min(1,1)/\max(7,10) = 1/10$	$\min(0.7,1)/\max(8,10) = 0.7/10$	$\max\limits_{j=2}(0.3,1,0.7)/\max(10,10,10) = 1/10$
3	0.6/11	$\min(0.3,0.6)/\max(5,11) = 0.3/11$	$\min(1,0.6)/\max(7,11) = 0.6/11$	$\min(0.7,0.6)/\max(8,11) = 0.6/11$	$\max\limits_{j=3}(0.3,0.6,0.6)/\max(11,11,11) = 0.6/11$
4	0.8/12	$\min(0.3,0.8)/\max(5,12) = 0.3/12$	$\min(1,0.8)/\max(7,12) = 0.8/12$	$\min(0.7,0.8)/\max(8,12) = 0.7/12$	$\max\limits_{j=4}(0.3,0.8,0.7)/\max(12,12,12) = 0.8/12$

Итак, $\widetilde{\max}(a,b) = 0.7/9 + 1/10 + 0.6/11 + 0.8/12 = b$. Следовательно, $b > a$.

С помощью аналогичной таблицы легко получить

$$\widetilde{\min}(a,b) = 0.3/5 + 1/7 + 0.7/8 = a.$$

Следовательно, $a < b$.

Свойства операций над нечеткими числами значительно отличаются от свойств операций над обычными числами. Сложение и умножение нечетких чисел обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, но дистрибутивность, свойство нуля, свойство единицы, а также антисимметричность неравенства могут быть нарушены. Существуют нечеткие числа, для которых справедливы утверждения:

1) $a \cdot (b+c) \neq a \cdot b + a \cdot c$;

2) $a + (-a) \neq 0$;

3) $a \cdot \frac{1}{a} \neq 1$;

4) если $a \geq b$, то не всегда $b \leq a$.

Нарушение обычных свойств операций над числами делает выполнение арифметических действий над нечеткими числами с непрерывными носителями и сравнение таких чисел довольно трудной задачей.

Рассмотрим правила выполнения алгебраических операций над классом нечетких чисел, в который входят нормальные, унимодальные нечеткие числа, выпуклые слева и справа от точки максимума функции принадлежности.

Рассмотрим пример выполнения операций над числами этого класса.

Пусть $a = \{\textit{примерно } 7\}$ и $b = \{\textit{примерно } 10\}$, $A = \int\limits_{x\in[4,7]} \frac{x-4}{3}/x + \int\limits_{x\in(7,9]} \frac{9-x}{2}/x$,

$B = \int\limits_{x\in[6,10]} \frac{x-6}{4}/x + \int\limits_{x\in(10,15]} \frac{15-x}{5}/x$.

Графики функций принадлежности нечетких чисел a и b изображены на рис. 2.1 – 2.2.

Носителями нечетких чисел a и b являются отрезки: $U_a = [4,9]$, $U_b = [6,15]$.

Пусть множеством α-уровня числа a является отрезок $[a_1,a_2]$ $(4 \leq a_1, a_2 \leq 9)$. Это означает, что для любого $x (x \in [a_1,a_2])$ выполняется неравенство $\mu_a(x) \geq \alpha$. Числа a_1 и a_2 найдем, решив уравнения:

$$\mu_{\uparrow a}(x) = \frac{x-4}{3} = \alpha, \qquad \mu_{\downarrow a}(x) = \frac{9-x}{2} = \alpha,$$
$$x = a_1 = \mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \qquad x = a_2 = \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha),$$
$$a_1 = 4 + 3\alpha, \qquad a_2 = 9 - 2\alpha.$$

Здесь $\mu_{\uparrow a}(x) = \frac{x-4}{3}$ – функция принадлежности числа a на интервале ее возрастания $x \in [4,7]$, $\mu_{\downarrow a}(x) = \frac{9-x}{2}$ – функция принадлежности числа a на интервале убывания $x \in [7,9]$. Обозначим $\mu_{\uparrow a}(x) = y_1$ и $\mu_{\downarrow a}(x) = y_2$ и разрешим равенства относительно x. В результате получим функции $\mu_{\uparrow a}^{-1}(y_1) = x_1 = 4 + 3y_1$ и

$\mu_{\downarrow a}^{-1}(y_2) = x_2 = 9 - 2y_2$, обратные функциям $\mu_{\uparrow a}(x) = \frac{x-4}{3}$ и $\mu_{\downarrow a}(x) = \frac{9-x}{2}$. Интервал $[a_1, a_2] = [\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)] = [4+3\alpha, 9-2\alpha]$ является *множеством* α*-уровня числа* a, поскольку для всех x этого интервала выполняется неравенство

$$\mu_a(x) \geq \alpha \quad (x \in [4+3\alpha, 9-2\alpha]).$$

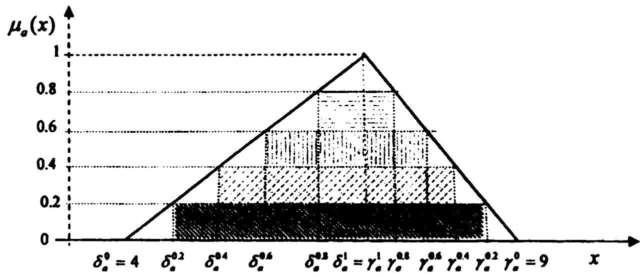


Рис.2.1. График функции принадлежности $\mu_a(x)$ нечеткого числа $a = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[4+3\alpha, 9-2\alpha]$ и множества уровня $[\delta_a^\alpha, \gamma_a^\alpha]$ $(\alpha = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$ этого числа

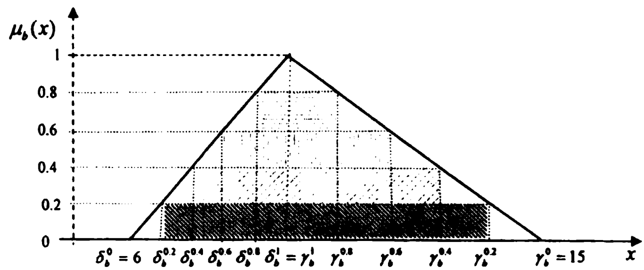


Рис.2.2. График функции принадлежности $\mu_b(x)$ нечеткого числа $b = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[6+4\alpha, 15-5\alpha]$ и множества уровня $[\delta_b^\alpha, \gamma_b^\alpha]$ $(\alpha = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$ этого числа

Разложение числа a по множествам α-уровня имеет вид

$$a = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)] = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[4+3\alpha, 9-2\alpha].$$

Напомним, что символ $\int_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)]$ означает *объединение* всех нечетких множеств, носителями которых являются интервалы вида $[\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)]$, а функция принадлежности на каждом из этих интервалов принимает значение α.

Выполняя аналогичные преобразования, получим разложение по множествам α-уровня числа b:

$$b = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[\mu_{\uparrow b}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow b}^{-1}(\alpha)] = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[6+4\alpha, 15-5\alpha].$$

Обозначим

$$\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha) = \delta_a^\alpha, \quad \mu_{\uparrow b}^{-1}(\alpha) = \delta_b^\alpha, \quad \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha) = \gamma_a^\alpha, \quad \mu_{\downarrow b}^{-1}(\alpha) = \gamma_b^\alpha;$$

$$x \in [\delta_a^\alpha, \gamma_a^\alpha] \Rightarrow x = x_\alpha; \quad x \in [\delta_b^\alpha, \gamma_b^\alpha] \Rightarrow x = y_\alpha.$$

Разложение по множествам α-уровням нечетких чисел a и b показаны на рис. 2.1 и 2.2 .

Учитывая простейшие свойства числовых неравенств, получаем множества α-уровня:

1) для суммы:

$$\begin{array}{r} \delta_a^\alpha \le x_\alpha \le \gamma_a^\alpha \\ \delta_b^\alpha \le y_\alpha \le \gamma_b^\alpha \\ \delta_a^\alpha + \delta_b^\alpha \le x_\alpha + y_\alpha \le \gamma_a^\alpha + \gamma_b^\alpha \end{array} \Rightarrow \alpha/(a+b) = \alpha/[\delta_a^\alpha + \delta_b^\alpha, \gamma_a^\alpha + \gamma_b^\alpha];$$

2) разности:

$$\begin{array}{r} \delta_a^\alpha \le x_\alpha \le \gamma_a^\alpha \\ -\gamma_b^\alpha \le -y_\alpha \le -\delta_b^\alpha \\ \delta_a^\alpha - \gamma_b^\alpha \le x_\alpha - y_\alpha \le \gamma_a^\alpha - \delta_b^\alpha \end{array} \Rightarrow \alpha/(a-b) = \alpha/[\delta_a^\alpha - \gamma_b^\alpha, \gamma_a^\alpha - \delta_b^\alpha];$$

3) произведения:

$$\begin{array}{r} 0 \le \delta_a^\alpha \le x_\alpha \le \gamma_a^\alpha \\ 0 \le \delta_b^\alpha \le y_\alpha \le \gamma_b^\alpha \\ \delta_a^\alpha \cdot \delta_b^\alpha \le x_\alpha \cdot y_\alpha \le \gamma_a^\alpha \cdot \gamma_b^\alpha \end{array} \Rightarrow \alpha/(a\cdot b) = \alpha/[\delta_a^\alpha \cdot \delta_b^\alpha, \gamma_a^\alpha \cdot \gamma_b^\alpha] \quad (\delta_a^\alpha \ge 0, \quad \delta_b^\alpha \ge 0);$$

4) частного:

$$\begin{array}{r} 0 \le \delta_a^\alpha \le x_\alpha \le \gamma_a^\alpha \\ 0 < \dfrac{1}{\gamma_b^\alpha} \le \dfrac{1}{y_\alpha} \le \dfrac{1}{\delta_b^\alpha} \\ \dfrac{\delta_a^\alpha}{\gamma_b^\alpha} \le \dfrac{x_\alpha}{y_\alpha} \le \dfrac{\gamma_a^\alpha}{\delta_b^\alpha} \end{array} \Rightarrow \alpha/\left(\frac{a}{b}\right) = \alpha/\left[\frac{\delta_a^\alpha}{\gamma_b^\alpha}, \frac{\gamma_a^\alpha}{\delta_b^\alpha}\right] \quad (\delta_a^\alpha \ge 0, \quad \delta_b^\alpha > 0);$$

5) для максимума и минимума:

$$\max(\delta_a^\alpha, \delta_b^\alpha) \le \max(x_\alpha, y_\alpha) \le \max(\gamma_a^\alpha, \gamma_b^\alpha) \Rightarrow \alpha/\max(a,b) = \alpha/\left[\max(\delta_a^\alpha, \delta_b^\alpha), (\max(\gamma_a^\alpha, \gamma_b^\alpha)\right]$$

$$\min(\delta_a^\alpha, \delta_b^\alpha) \le \min(x_\alpha, y_\alpha) \le \min(\gamma_a^\alpha, \gamma_b^\alpha) \Rightarrow \alpha/\min(a,b) = \alpha/\left[\min(\delta_a^\alpha, \delta_b^\alpha), (\gamma_a^\alpha, \gamma_b^\alpha)\right]$$

Выполним все арифметические действия над числами a и b из приведенного выше примера:

$\delta_a^\alpha = 4 + 3\alpha;\quad \gamma_a^\alpha = 9 - 2\alpha;\quad \delta_b^\alpha = 6 + 4\alpha;\quad \gamma_b^\alpha = 15 - 5\alpha;$

$$a+b=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[4+3\alpha+6+4\alpha,9-2\alpha+15-5\alpha]=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[10+7\alpha,24-7\alpha];$$

$$a-b=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[4+3\alpha-15+5\alpha,9-2\alpha-6-4\alpha]=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[-11+8\alpha,3-6\alpha];$$

$$a\cdot b=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[(4+3\alpha)\cdot(6+4\alpha),(9-2\alpha)\cdot(15-5\alpha)]=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[24+34\alpha+12\alpha^2,135-75\alpha+10\alpha^2];$$

$$\frac{a}{b}=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/\left[\frac{4+3\alpha}{15-5\alpha},\frac{9-2\alpha}{6+4\alpha}\right];$$

$$\max(a,b)=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[\max(4+3\alpha,6+4\alpha),\max(9-2\alpha,15-5\alpha)]=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[6+4\alpha,15-5\alpha]=b;$$

$$\min(a,b)=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[\min(4+3\alpha,6+4\alpha),\min(9-2\alpha,15-5\alpha)]=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[4+3\alpha,9-2\alpha]=a.$$

Составим таблицу множеств уровня нечетких чисел a и b для $\alpha\in\{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$.

α	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$[\delta^{\alpha}_{a+b},\gamma^{\alpha}_{a+b}]$	[10,24]	[11.4,22.6]	[12.8,21.2]	[14.2,19.8]	[15.6,18.4]	{17}
$[\delta^{\alpha}_{a-b},\gamma^{\alpha}_{a-b}]$	[-11,3]	[-9.4,1.8]	[-7.8,0.6]	[-6.2,-0.6]	[-4.6, 1.8]	{-3}
$[\delta^{\alpha}_{a\cdot b},\gamma^{\alpha}_{a\cdot b}]$	[24,135]	[31.28,120.4]	[39.52,106.6]	[48.72,93.6]	[58.88,81.4]	{70}
$\left[\delta^{\alpha}_{\frac{a}{b}},\gamma^{\alpha}_{\frac{a}{b}}\right]$	$\left[\frac{4}{15},\frac{9}{6}\right]$	$\left[\frac{4.4}{14},\frac{8.6}{6.8}\right]\approx[0.31,1.26]$	$\left[\frac{5.2}{13},\frac{8.2}{7.6}\right]\approx[0.4,1.08]$	$\left[\frac{5.8}{12},\frac{7.8}{8.4}\right]\approx[0.48,0.93]$	$\left[\frac{6.4}{11},\frac{7.2}{9.2}\right]\approx[0.58,0.78]$	{0.7}

По данным таблицы построим графики функций принадлежности суммы, разности, произведения и частного этих нечетких чисел (рис. 2.3 – 2.6).

При разложении по множествам α-уровня нечетких чисел вычислялись значения функций, обратных функциям принадлежности на интервалах возрастания и убывания: $a=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[\mu^{-1}_{\uparrow a}(\alpha),\mu^{-1}_{\downarrow a}(\alpha)]$. Напомним, что однозначная обратная функция $f^{-1}(y)$ существует на промежутке $[x_1,x_2]$, если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на этом промежутке. Вот почему из множества всех нечетких чисел был выделен класс *нормальных, унимодальных нечетких чисел, выпуклых слева и справа от точки максимума функции принадлежности.*

Пусть:

1) $a=\int\limits_{U_a}\mu_a(x)/x$, $b=\int\limits_{U_b}\mu_b(x)/x$;

2) $\mu_a(a_0)=1$ $(a_0\in U_a)$, $\mu_b(b_0)=1$ $(b_0\in U_b)$;

3) $\mu_a(x)=\mu_{\uparrow a}(x), \quad x\in(-\infty,a_0], \quad \mu_b(x)=\mu_{\uparrow b}(x), \quad x\in(-\infty,b_0]$ – функции принадлежности чисел a и b возрастают (не убывают) на интервалах $(-\infty,a_0]$ и $(-\infty,b_0]$;

4) $\mu_a(x)=\mu_{\downarrow a}(x), \quad x\in[a_0,\infty), \quad \mu_b(x)=\mu_{\downarrow b}(x), \quad x\in[b_0,\infty)$ – функции принадлежности чисел a и b убывают (не возрастают) на интервалах $[a_0,\infty)$ и $[b_0,\infty)$.

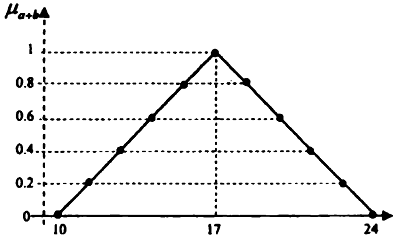


Рис. 2.3. График функции принадлежности суммы нечетких чисел a и b

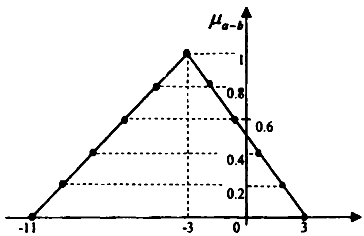


Рис. 2.4. График функции принадлежности разности нечетких чисел a и b

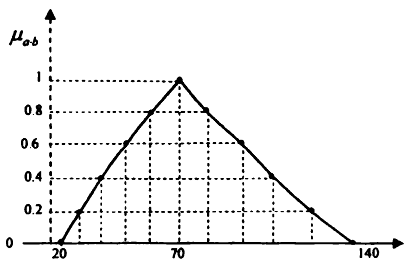


Рис. 2.5. График функции принадлежности произведения нечетких чисел a и b

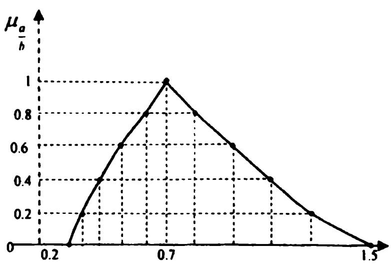


Рис. 2.6. График функции принадлежности частного нечетких чисел a и b

Тогда правила выполнения арифметических операций над нечеткими числами определяются формулами 2.1 – 2.6:

$$(a+b)=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[\delta_a^\alpha+\delta_b^\alpha,\gamma_a^\alpha+\gamma_b^\alpha], \qquad (2.1)$$

$$(a-b)=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[\delta_a^\alpha-\gamma_b^\alpha,\gamma_a^\alpha-\delta_b^\alpha],\tag{2.2}$$

$$(a\cdot b)=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[\delta_a^\alpha\cdot\delta_b^\alpha,\gamma_a^\alpha\cdot\gamma_b^\alpha]\quad(\delta_a^\alpha\ge 0,\quad \delta_b^\alpha\ge 0),\tag{2.3}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha/\left[\frac{\delta_a^\alpha}{\gamma_b^\alpha},\frac{\gamma_a^\alpha}{\delta_b^\alpha}\right]\quad(\delta_a^\alpha\ge 0,\quad \delta_b^\alpha>0),\tag{2.4}$$

$$\max(a,b)=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[\max(\delta_a^\alpha,\delta_b^\alpha),\max(\gamma_a^\alpha,\gamma_b^\alpha)],\tag{2.5}$$

$$\min(a,b)=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha/[\min(\delta_a^\alpha,\delta_b^\alpha),\min(\gamma_a^\alpha,\gamma_b^\alpha)],\tag{2.6}$$

где $\delta_a^\alpha=\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha)$, $\delta_b^\alpha=\mu_{\uparrow b}^{-1}(\alpha)$, $\gamma_a^\alpha=\mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)$, $\gamma_b^\alpha=\mu_{\downarrow b}^{-1}(\alpha)$.

Рассмотрим вопрос о ***равенстве*** и ***нечетком равенстве*** нечетких чисел. Числа $a=\{U_a,\mu_a(x)(x\in U_a)\}$ и $b=\{U_b,\mu_b(x)(x\in U_b)\}$ равны друг другу, если $U_a=U_b$ и при любом x выполняется равенство $\mu_a(x)=\mu_b(x)$. В теории нечетких множеств закономерен также вопрос о нечетком или приближенном равенстве нечетких чисел, который решается с использованием понятия *обычного множества, ближайшего к данному нечеткому множеству*. Напомним, что обычным множеством, ближайшим к нечеткому множеству $a=\{U_a,\mu_a(x)(x\in U_a)\}$, называют множество A_0, характеристическая функция которого имеет вид

$$\mu_{A_0}(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \mu_a(x)<0.5\\ 1, & \text{если}\quad \mu_a(x)>0.5\\ 0\ \text{или}\ 1, & \text{если}\quad \mu_a(x)=0.5\end{cases}.$$

Отметим, что при вычислении индексов нечеткости (см. разд. 1.5) такое определение множества A_0 вполне удовлетворительно, поскольку индексы нечеткости определяются разностями вида $|\mu_A(x)-\mu_{A_0}(x)|$ или $(\mu_A(x)-\mu_{A_0}(x))^2$, которые дают 0.5 и 0.5^2 при $\mu_A(x)=0.5$, независимо от того, какое из двух возможных значений $\mu_{A_0}(x)=0$ или $\mu_{A_0}(x)=1$ выбрано. Но при решении вопроса о нечетком равенстве необходимо выбрать какой-то определенный вариант.

Примем $\mu_{a_0}(x)=\begin{cases}0, & если \quad \mu_a \le 0.5\\ 1, & если \quad \mu_a > 0.5\end{cases}$. Очевидно, что для каждого нечеткого числа существует единственный промежуток числовой оси, ближайший к нему. Но любой интервал или отрезок числовой оси является ближайшим множеством для различных нечетких чисел (рис. 2.7).

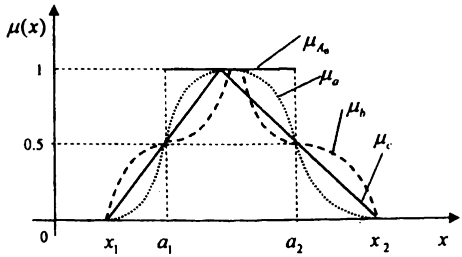


Рис. 2.7. Приближенно равные нечеткие числа: $a \approx b \approx c$

Носителем каждого из чисел a, b и c является отрезок $[x_1, x_2]$ (см. рис. 2.7). Отрезок $[a_1, a_2]$ – обычное множество, ближайшее к каждому из этих нечетких чисел.

Определение 2.12. Нечеткие числа $a=\{U_a, \mu_a(x)(x \in U_a)\}$ и $b=\{U_b, \mu_b(x)(x \in U_b)\}$ называют ***приближенно равными***, если $a_0=[a_1, a_2]$ – обычное множество, ближайшее как к a, так и к b.

Отметим, что если принять $\mu_{a_0}(x)=\begin{cases}0, & если \quad \mu_a < 0.5\\ 1, & если \quad \mu_a \ge 0.5\end{cases}$, то результат сравнения нечетких чисел может оказаться другим, чем при первоначальном выборе (рис.2.8).

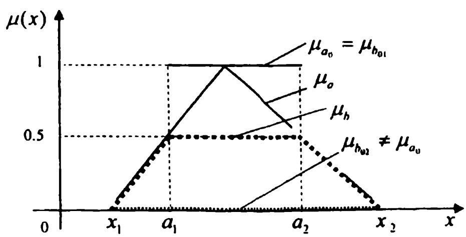


Рис. 2.8. Зависимость приближенного равенства нечетких чисел a и b от выбора обычного множества, ближайшего к этим числам

Так, если в качестве обычного множества, ближайшего к b', выбрать множество с функцией принадлежности $\mu_{b_{01}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_b < 0.5 \\ 1, & \text{если} \quad \mu_b \geq 0.5 \end{cases}$, то $\mu_{a_0} = \mu_{b_{01}}$ и $a \approx b$. Если же выбрать $\mu_{b_{02}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_b \leq 0.5 \\ 1, & \text{если} \quad \mu_b > 0.5 \end{cases}$ $\mu_{a_0} = \mu_{b_1}$, то $\mu_{a_0} \neq \mu_{b_2}$ и приближенного равенства нет.

Для построения моделей, в которых используются нечеткие числа, достаточно знать такие характеристики функций принадлежности этих чисел, которые позволяют отнести число к определенному классу приближенно равных чисел. Это очень облегчает оперирование с нечеткими числами. Так, большую роль в моделировании играют числа ($L-R$)-типа и S-типа. $L-R$

Определение 2.13. Нечеткое число a называют ***числом (L–R)-типа***, если оно является нормальным унимодальным множеством, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & \text{если} \quad x \leq a \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & \text{если} \quad x \geq a \end{cases}, \tag{2.7}$$

причем функции $L(t)$ и $R(t)$ обладают следующими свойствами:

1. $L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) = L\left(\dfrac{x-a}{\alpha}\right)$, $R\left(\dfrac{a-x}{\beta}\right) = R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right)$, (2.8)

2. $L(0) = R(0) = 1$, (2.9)

3. $L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right)$ – неубывающая функция слева от точки $x = a$, (2.10)

4. $R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right)$ – невозрастающая функция справа от точки $x = a$. (2.11)

Любое число $(L-R)$-типа определяется тройкой параметров $A = (a, \alpha, \beta)$, где a – мода числа, т.е. действительное число, доставляющее функции принадлежности максимум, равный единице: $\mu_A(a) = 1$; α и β $(\alpha > 0, \beta > 0)$ – левый и правый коэффициенты нечеткости, задаваемые экспертом.

Арифметические действия для чисел ($L-R$)-типа выполняются по следующим правилам.

Пусть $A_{LR} = (a, \alpha, \beta)$, $B_{LR} = (b, \gamma, \delta)$. Справедливы формулы:

1) сложения:

$$(a, \alpha, \beta)_{LR} + (b, \gamma, \delta)_{LR} = (a + b, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}; \tag{2.12}$$

2) вычитания (при условии $-(a, \alpha, \beta)_{LR} = (-a, \beta, \alpha)_{LR}$):

$$(a,\alpha,\beta)_{LR}-(b,\gamma,\delta)_{LR}=(a-b,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}; \tag{2.13}$$

3) умножения (при условии $a>0,b>0$):

$$(a,\alpha,\beta)_{LR}\cdot(b,\gamma,\delta)_{LR}\approx(a\cdot b,a\cdot\gamma+b\cdot\alpha,a\cdot\delta+b\cdot\beta)_{LR}; \tag{2.14}$$

4) умножения (при условии $a<0,b>0$):

$$(a,\alpha,\beta)_{LR}\cdot(b,\gamma,\delta)_{LR}\approx(a\cdot b,b\cdot\alpha-a\cdot\delta,b\cdot\beta-a\cdot\gamma)_{LR}; \tag{2.15}$$

5) умножения (при условии $a<0,b<0$):

$$(a,\alpha,\beta)_{LR}\cdot(b,\gamma,\delta)_{LR}\approx(a\cdot b,(-b\cdot\beta-a\cdot\delta),(-b\cdot\alpha-a\cdot\gamma))_{LR}; \tag{2.16}$$

6) нахождения обратного нечеткого числа (при условии $x>0,a>0$):

$$(a,\alpha,\beta)_{LR}^{-1}=\left(\frac{1}{a},\frac{\beta}{a^2},\frac{\alpha}{a^2}\right)_{LR}; \tag{2.17}$$

7) деления (при условии $x>0,a>0,b>0$):

$$(a,\alpha,\beta)_{LR}\div(b,\gamma,\delta)_{LR}\approx(\frac{a}{b},\frac{a\cdot\delta+b\cdot\alpha}{b^2},\frac{a\cdot\gamma+b\cdot\beta}{b^2})_{LR}. \tag{2.18}$$

Рассмотрим пример вычислений по формулам (2.12) – (2.18).

Пусть $a=\{\textit{примерно}\quad 7\}$ и $b=\{\textit{примерно}\quad 10\}$ – нечеткие числа с функциями принадлежности

$$\mu_A=\begin{cases}\dfrac{x-4}{3}, & \textit{если}\quad 4\le x\le 7\\ \dfrac{9-x}{2}, & \textit{если}\quad 7<x\le 9\end{cases},\ \mu_B=\begin{cases}\dfrac{x-6}{4}, & \textit{если}\quad 6\le x\le 10\\ \dfrac{15-x}{5}, & \textit{если}\quad 10<x\le 15\end{cases},$$

(см. рис. 2.1, 2.2).

Покажем, что числа a и b являются нечеткими числами ($L-R$)-типа.

Рассмотрим число a. Можно видеть, что

$$\mu_A(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & \textit{если}\quad x\le a\\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & \textit{если}\quad x\ge a\end{cases},$$

где $L_A\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right)=\dfrac{x-4}{3}=1-\dfrac{|7-x|}{3},\quad \textit{если}\quad x<7,$

$R_A\left(\dfrac{a-x}{\beta}\right)=\dfrac{9-x}{2}=1-\dfrac{|7-x|}{2},\quad \textit{если}\quad x\ge 7$, причем $a=7,\alpha=3,\beta=2$.

Легко проверить, что функции L_A и R_A удовлетворяют требованиям 2.8 – 2.11 в определении 2.13:

1) $L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right)=1-\frac{|7-x|}{3}=1-\frac{|x-7|}{3}=L\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)$,

$R\left(\frac{a-x}{\beta}\right)=1-\frac{|7-x|}{2}=1-\frac{|x-7|}{2}=R\left(\frac{x-a}{\beta}\right)$;

2) $L(0)=1-0=1$, $R(0)=1-0=1$;

3) $L_A\left(\frac{a-x}{\alpha}\right)=\frac{x-4}{3}$ – неубывающая функция слева от точки $x=7$, что легко проверить, найдя ее производную: $L'_A=\left(\frac{x-4}{3}\right)'=\frac{1}{3}>0$;

4) $R_A\left(\frac{a-x}{\beta}\right)=\frac{9-x}{2}$ – невозрастающая функция справа от точки $x=a$, что также легко проверяется с помощью производной.

Итак, число $a=\{\text{примерно } 7\}$ является числом (L–R)-типа, причем $A=$ $=(a,\alpha,\beta)=(7,3,2)$.

По аналогии легко показать, что и число $b=\{\text{примерно } 10\}$ также является числом ($L-R$)-типа:

$$\mu_B(x)=\begin{cases}L\left(\frac{b-x}{\gamma}\right), & \text{если } x\le b\\ R\left(\frac{x-b}{\delta}\right), & \text{если } x\ge b\end{cases},$$

причем

$$L_B\left(\frac{b-x}{\gamma}\right)=1-\frac{|10-x|}{4},\quad R_B\left(\frac{b-x}{\delta}\right)=1-\frac{|10-x|}{5},$$

а следовательно, $b=10,\gamma=4,\delta=5$; $B=(b,\gamma,\delta)=(10,4,5)$.

Выполним над a и b арифметические операции по формулам (2.12), (2.13), (2.14), (2.18):

1) сложение: $(7,3,2)+(10,4,5)=(17,7,7)$;

2) вычитание: $(7,3,2)-(10,4,5)=(-3,8,6)$;

3) умножение: $(7,3,2)\cdot(10,4,5)\approx(7\cdot 10,7\cdot 4+10\cdot 3,7\cdot 5+10\cdot 2)=(70,58,55)$;

4) деление: $(7,3,2)\div(10,4,5)\approx(\frac{7}{10},\frac{7\cdot 5+10\cdot 3}{10^2},\frac{7\cdot 4+10\cdot 2}{10^2})=(0.7,0.65,0.48)$

(см. рис. 2.3 – 2.6).

2.3. Принцип обобщения

Принцип обобщения для нечетких множеств, в частности для нечетких чисел, представляет собой в сущности основное равенство, позволяющее расширить область определения U отображения или отношения, включив в нее наряду с точками (числовой оси) нечеткие подмножества множества U [2].

Пусть к примеру на универсальном множестве $U=\{1,2,...,10\}$ задано нечеткое число $a=1/1+1/2+0.8/3+0.6/4+0.4/5$. Тогда нечеткое число $a^2=1/1+1/4+0.8/9+0.6/16+0.4/25$. Связь между множествами a и a^2 есть отображение множества $U_a=\{1,2,3,4,5\}$ во множество $f(U)=\{1,4,9,16,25\}$, причем $f(u)=u^2$, а $\mu_a(f(u))=\mu_a(u)$ для любого $u(u\in U_a)$.

Дадим формулировку принципа обобщения для дискретных и непрерывных носителей.

Пусть f – отображение $U\xrightarrow{f}V$.

1) $A=\mu_1/u_1+\mu_2/u_2+...+\mu_n/u_n$ – нечеткое подмножество (нечеткое число) с дискретным носителем.

Тогда

$$f(A)=f(\mu_1/u_1+\mu_2/u_2+...+\mu_n/u_n)=\mu_1/f(u_1)+\mu_2/f(u_2)+...+\mu_n/f(u_n). \qquad (2.19)$$

2) $A=\int\limits_U \mu_A(u)/u$ – нечеткое подмножество (нечеткое число) с непрерывным носителем.

Тогда

$$f(A)=f\left(\int\limits_U \mu_A(u)/u\right)=\int\limits_V \mu_A(u)/f(u). \qquad (2.20)$$

Во многих случаях удобно применять принцип обобщения, используя разложение множества A по множествам α - уровня:

$$A=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/A_\alpha \Rightarrow f(A)=f(\int\limits_{\alpha\in[0,1]}a/A_\alpha)=\int\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha/f(A_\alpha), \qquad (2.21)$$

$$A=\sum_\alpha \alpha/A_\alpha \Rightarrow f(A)=f(\sum_\alpha \alpha/A_\alpha)=\sum_\alpha \alpha/f(A_\alpha), \qquad (2.22)$$

Рассмотрим пример использования принципа обобщения.

Пример

Пусть множество $U = [1,10]$ отображается во множество $V = [0,1]$ по закону $v = \lg u$. U является носителем нечеткого множества $A = \int\limits_U \frac{u-1}{9} / u$. Найдем образ множества A при данном отображении. Для этого разложим множество A по α-уровням:

$$A = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / A_\alpha,$$

где A_α – отрезки числовой оси, над которыми выполняется неравенство $\mu(u) = \frac{u-1}{9} \geq \alpha$.

Разрешая это неравенство относительно u и учитывая, что $u \in [1,10]$, получаем $9\alpha + 1 \leq u \leq 10$, т.е. $A_\alpha = [9\alpha + 1,10]$.

Найдем образ множества A при отображении $v = \lg u$. Общая формула, согласно принципу обобщения, имеет вид

$$\lg A = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / \lg A_\alpha = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [\lg(9\alpha+1), \lg 10] = \int\limits_{\substack{\alpha\in[0,1]\\ v=\lg(9\alpha+1)}} \alpha / [v,1].$$

Из равенства $v = \lg(9\alpha + 1)$ получаем $\alpha = \frac{10^v - 1}{9}$, $\quad v \in [0,1]$.

Таким образом, $\lg A = \int\limits_{v\in[0,1]} \frac{10^v - 1}{9} / v$ является нечетким множеством, носителем которого служит отрезок $V = [0,1]$, а функцией принадлежности – $\mu_{\lg A}(v) = \frac{10^v - 1}{9}$.

Построим по точкам графики функций принадлежности $\mu_A(u)$ $(u \in [1,10])$ и $\mu_{\lg A} v$ $(v \in [0,1])$ (рис. 1 и 2). Для этого запишем таблицы значений данных функций.

u	1	-	-	-	10
$\mu_A(u) = \frac{u-1}{9}$	0	-	-	-	1
v	0	0.25	0.5	0.75	1
$\mu_{\lg A}(v) = \frac{10^v - 1}{9}$	0	0.09	0.24	0.51	1

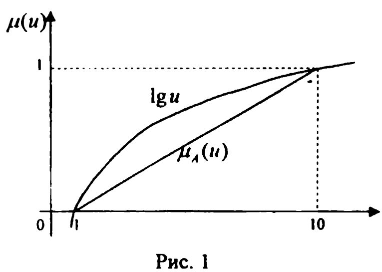


Рис. 1

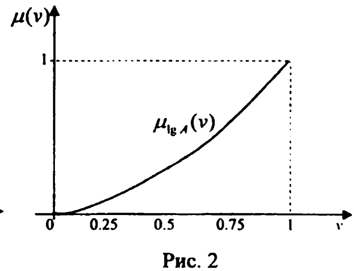


Рис. 2

Задания для самостоятельной работы

1. Даны нечеткие числа: $a = \{\textit{немного больше } 3\}$ и $b = \{\textit{примерно } 3\}$, причем $A = 1/4 + 0.5/5 + 0.2/6$ и $B = 0.3/1 + 0.8/2 + 1/3 + 0.8/4 + 0.3/5$.

Выполните арифметические операции и сравните числа a и b.

2. Пусть $U = \{0,1,2,...,25\}$ является носителем следующих нечетких чисел:

$a =$ {в городе N проезд на метро стоит приблизительно 8 р.},

$b =$ {проезд на маршрутке в этом городе стоит не менее 15 р.},

$c =$ {мне надо проехать на метро раз пять},

$d =$ {мне надо проехать на маршрутке, по крайней мере, раза три}.

1) Выступая в роли эксперта, запишите нечеткие числа a, b, c и d в форме объединения точечных нечетких множеств.

2) Найдите $x = \{\textit{примерная сумма расходов на транспорт в городе } N\}$.

3) Разложите нечеткие числа a, b, c, d и x по множествам α-уровня, если $\alpha \in \{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$.

4) Постройте графики функций принадлежности чисел a, b, c, d и x.

3. Пусть $a = \{\textit{немного больше } 3\}$ и $b = \{\textit{примерно } 5\}$, причем

$$A = \int_{x\in(3,6]} \frac{6-x}{3}/x,\quad B = \int_{x\in[3,5]} \frac{x-3}{2}/x + \int_{x\in(5,7]} \frac{7-x}{2}/x.$$

1) Разложите нечеткие числа a и b по множествам α-уровня, если $\alpha \in \{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$.

2) Постройте графики функций принадлежности этих чисел, используя полученные разложения.

3) Запишите функции принадлежности и постройте их графики для чисел $a+b$, $a\text{-}b$, $a \cdot b$, $a:b$.

4) Сравните числа a и b.

4. Докажите, что нечеткие числа a и b являются числами $(L-R)$-типа, если

$$A = \int_{x\in[0,4]} \frac{x}{4}/x + \int_{x\in(4,6]} \frac{6-x}{2}/x,\quad B = \int_{x\in[3,5]} \frac{x-3}{2}/x + \int_{x\in(5,10]} \frac{10-x}{5}/x.$$

Выполните над a и b все арифметические операции и сравните эти числа.

5. Множество $U = [-1,1]$ является носителем нечеткого множества $A = \int\limits_U \frac{4-x}{8} / u$. U отображается во множество $V = [0,1]$.

1) Применяя принцип обобщения, найдите образы следующих нечетких множеств:

а) $A_1 = 1 - A^2$,

б) $A_2 = 2^{|A|-1}$,

в) $A_3 = \sin\frac{\pi|A|}{2}$.

2) Постройте графики функций принадлежности множеств A_1, A_2, A_3.

3. НЕЧЕТКИЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ

3.1. Бинарные отношения

Бинарные отношения[1] на обычных множествах изучаются в курсе дискретной математики. Напомним основные положения теории бинарных отношений.

Пусть A – какое-либо множество, дискретное или непрерывное.

Определение 3.1. ***Декартовым квадратом*** множества A называют множество A^2 всех пар элементов этого множества.

Например, декартов квадрат множества $A=\{a,b,c\}$ – это множество всех пар элементов a,b и c: $A^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

Определение 3.2. ***Бинарным отношением на множестве*** A называют подмножество Γ множества A^2.

Так $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}\subset A^2$; Γ – график бинарного отношения на множестве A.

Определение 3.3. Если $\Gamma\subseteq A^2$ – бинарное отношение на множестве A и $(a,b)\in\Gamma$, то элемент $b(b\in A)$ называют ***образом элемента*** $a(a\in A)$ в отношении Γ, элемент a – ***прообразом элемента*** b в отношении Γ, множество всех образов элемента a образуют ***полный образ*** этого элемента, а множество всех прообразов элемента b – ***полный прообраз*** b в отношении Γ. Множество образов всех элементов A составляют ***полный образ множества*** A, а множество прообразов всех его элементов – ***полный прообраз множества*** A в отношении Γ.

Поясним приведенные термины на примере отношения $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}\subset A^2$ ($A=\{a,b,c\}$).

Термин	Элементы множества A					***Полный образ множества*** A в отношении Γ
	a		b		c	
Образ элемента множества A в отношении Γ	a	c	a	c	-	$\{a,c\}$

Термин	Элементы множества A					***Полный прообраз множества*** A в отношении Γ
	a		b	c		
Прообраз элемента множества A в отношении Γ	a	b	-	a	b	$\{a\ b\}$

[1] В современной алгебраической литературе понятия "бинарные отношения" и "бинарные соответствия" не разделяются. В данном пособии традиционное разделение этих понятий оказалось удобным с методической точки зрения.

Бинарное отношение может быть задано следующими способами.

1. *График бинарного отношения*. Если множество A конечно, то график Γ – это список пар из множества A^2, в которых элементы соединены отношением. Если A – это часть числовой оси или вся ось, то график может быть представлен геометрически в системе координат.

2. *Характеристическое свойство бинарного отношения*. Характеристическое свойство – это свойство, определяющее характер связи между элементами в парах. Для обозначения характеристического свойства употребляется символ "ρ". Например, $a\rho b$: "a старше b" (на множестве людей), $a\rho b$: "$a^2+b^2=1$" (на множестве чисел) и т.п.

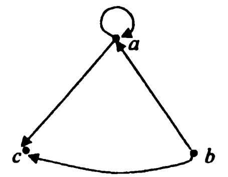


Рис. 3.1. Граф бинарного отношения $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}$ на множестве $A=\{a,b,c\}$

3. *Граф бинарного отношения*. Граф бинарного отношения – это чертеж, состоящий из точек (вершин графа) и направленных отрезков или дуг (ребер графа). Вершины графа соответствуют элементам множества A. Ребра графа соединяют элементы множества A с их образами.

Например, граф бинарного отношения $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}$ на множестве $A=\{a,b,c\}$ будет выглядеть так (рис. 3.1).

4. *Матрица бинарного отношения*. Матрица $J_\Gamma=(x_{ij})$ бинарного отношения Γ на множестве A, содержащем n элементов, – это матрица порядка n, элементы которой x_{ij} $(i=1,2,...,n,\quad j=1,2,...,n)$ имеют значения:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & если \quad (a_i,a_j)\in\Gamma \\ 0, & если \quad (a_i,a_j)\notin\Gamma\end{cases} \quad (a_i,a_j\in A).$$

Так, матрица отношения Γ (см. рис. 3.1) – это матрица $J_\Gamma=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5. *Характеристическая функция*. Характеристическая функция $\mu(x,y)$ бинарного отношения Γ на множестве A – это функция от двух аргументов x и y $(x,y\in A)$ такая, что $\mu(x,y)=\begin{cases}1, & если \quad (x,y)\in\Gamma \\ 0, & если \quad (x,y)\notin\Gamma\end{cases}.$

Например, характеристическую функцию отношения Γ (см. рис.3.1) можно записать в виде таблицы:

$\mu(a,a)$	$\mu(a,b)$	$\mu(a,c)$	$\mu(b,a)$	$\mu(b,b)$	$\mu(b,c)$	$\mu(c,a)$	$\mu(c,b)$	$\mu(c,c)$
	0	1	1	0	1	0	0	0

С точки зрения математической логики элементы матрицы бинарного отношения, так же как и значения характеристической функции, являются значениями истинности высказываний $(a_i, a_j) \in \Gamma$. Например, характеристическую функцию в терминах математической логики можно записать следующим образом:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} \textit{истина}, & \textit{если} \quad (x,y) \in \Gamma \\ \textit{ложь}, & \textit{если} \quad (x,y) \notin \Gamma \end{cases}.$$

Определение 3.4. ***Композицией бинарных отношений*** Γ_1 и Γ_2, заданных на множестве A, называют отношение $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ такое, что $\forall a(a \in A), \forall b(b \in A) : ((a,b) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists c(c \in A) : (a,c) \in \Gamma_1 \wedge (c,b) \in \Gamma_2)$.

Пусть $A = \{a,b,c\}$. Отношения Γ_1 и Γ_2 заданы матрицами:

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x_{ij})_{3\times3}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (y_{ij})_{3\times3}.$$

Найдем композицию $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$, для чего:

1) используя матрицы J_{Γ_1} и J_{Γ_2}, запишем графики отношений Γ_1 и Γ_2: $\Gamma_1 = \{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c),(c,b)\}$, $\Gamma_2 = \{(a,b),(a,c),(b,c),(c,a)\}$;

2) построим графы отношений Γ_1 и Γ_2 и объединим их (рис. 3.2);

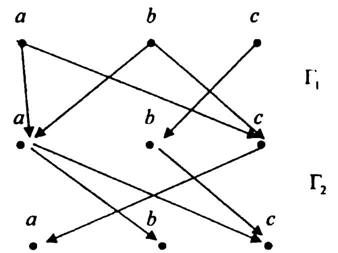


Рис. 3.2. Графы отношений Γ_1 и Γ_2 и их объединение

Примечание 1. Графы Γ_1 и Γ_2 построены в виде двудольных графов, причем входы графа Γ_1 являются выходами графа Γ_2.

Примечание 2. Пути в объединении графов Γ_1 и Γ_2 ведут от элементов множества A к их образам в отношении Γ_1, и далее к образам в отношении Γ_2.

3) выпишем все пути, ведущие от элементов a, b и c к их образам в отношении Γ, а также промежуточные элементы в этих путях, посредством

которых осуществляются связи в отношении Γ. Результат представим в виде таблицы:

Пути от элементов множества A к их образам в отношении $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$	Элемент, осуществляющий опосредованную связь в композиции отношений Γ_1 и Γ_2	Элементы графика отношения $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$
$a \to a \to b$	a	(a,b)
$a \to a \to c$	a	(a,c)
$a \to c \to a$	c	(a,a)
$b \to a \to b$	a	(b,b)
$b \to a \to c$	a	(b,c)
$b \to c \to a$	c	(b,a)
$c \to b \to c$	b	(c,c)

4) запишем график отношения $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(b,a),(c,c)\}$ и построим его граф (рис. 3.3).

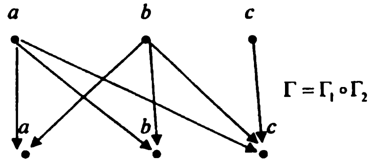


Рис. 3.3. Граф композиции отношений $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$

Рассмотрим вопрос об отыскании элементов композиции отношений с точки зрения математической логики. Например, высказывание $(a,a) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ является истинным, если истинна дизъюнкция высказываний:

$$((a,a) \in \Gamma_1 \wedge (a,a) \in \Gamma_2) \vee ((a,b) \in \Gamma_1 \wedge (b,a) \in \Gamma_2) \vee ((a,c) \in \Gamma_1 \wedge (c,a) \in \Gamma_2).$$

Примечание. Напомним, что знаками $\wedge$ и $\vee$ в математической логике обозначаются операции конъюнкции и дизъюнкции высказываний. Высказывание $a \wedge b$ истинно, если истинны оба высказывания, как a, так и b, высказывание $a \vee b$ истинно, если истинно хотя бы одно из них. Конъюнкцию называют также операцией "И" или логическим умножением, дизъюнкцию – операцией "ИЛИ" или логическим сложением.

Истинность или ложность каждого простого высказывания, участвующего в этом сложном высказывании, соответствует единице или нулю в первой строке матрицы J_{Γ_1} и первом столбце матрицы J_{Γ_2}.

Например,

$(a,a)\in\Gamma_1 = x_{11} = 1 \Rightarrow (a,a)\in\Gamma_1$ – *истина*,

$(a,a)\in\Gamma_2 = y_{11} = 0 \Rightarrow (a,a)\in\Gamma_2$ – *ложь*,

$(a,a)\in\Gamma_1 \wedge (a,b)\in\Gamma_2 = x_{11}\wedge y_{11} = x_{11}\cdot y_{11} = \min(x_{11},y_{11}) = \min(1,0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,a)\in\Gamma_1 \wedge (a,b)\in\Gamma_2$ – *ложь*.

Аналогично

$(a,b)\in\Gamma_1 \wedge (b,a)\in\Gamma_2 = x_{12}\wedge y_{21} = x_{12}\cdot y_{21} = \min(x_{12},y_{21}) = \min(0,0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)\in\Gamma_1 \wedge (b,a)\in\Gamma_2$ – *ложь*,

$(a,c)\in\Gamma_1 \wedge (c,a)\in\Gamma_2 = x_{13}\wedge y_{11} = x_{13}\cdot y_{31} = \min(x_{13},y_{11}) = \min(1,1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,c)\in\Gamma_1 \wedge (c,a)\in\Gamma_2$ – *истина*.

Значение истинности высказывания $(a,a)\in\Gamma_1\circ\Gamma_2$ равно значению истинности дизъюнкции всех трех конъюнкций или, по-другому, логической суммы трех произведений:

$$(a,a)\in\Gamma_1 \wedge (a,b)\in\Gamma_2 \text{ или } (a,b)\in\Gamma_1 \wedge (b,a)\in\Gamma_2 \text{ или } (a,c)\in\Gamma_1 \wedge (c,a)\in\Gamma_2 =$$

$$= x_{11}\cdot y_{11} + x_{12}\cdot y_{21} + x_{13}\cdot y_{31} = (x_{11},x_{12},x_{13})\cdot\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix} = \max(\min(x_{11},y_{11}),\min(x_{12},y_{21}),\min(x_{13},y_{31})) =$$

$$= \max(1,0,0) = 1.$$

Следовательно, $(a,a)\in\Gamma_1\circ\Gamma_2$ – *истина*.

Чтобы проверить истинность утверждения $(a,b)\in\Gamma_1\circ\Gamma_2$, надо таким же способом выполнить умножение первой строки матрицы J_{Γ_1} на второй столбец матрицы J_{Γ_2}:

$$(x_{11},x_{12},x_{13})\cdot\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix} = \max(\min x,y),\min(x,y),\min(x,y)) =$$

$$= \max(\min(1,1),\min(0,0),\min(1,0)) = \max(1,0,0) = 1.$$

Следовательно, $(a,b)\in\Gamma_1\circ\Gamma_2$ – *истина*.

Умножая элементы i-й строки матрицы J_{Γ_1} на соответствующие элементы j-го столбца матрицы J_{Γ_2} и складывая полученные произведения, находят элемент s_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $J_{\Gamma_1}\cdot J_{\Gamma_2} = J$. Элемент s_{ij} максиминного произведения матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2} равен единице, если соответствующая пара элементов множества A принадлежит композиции произведений $\Gamma_1\circ\Gamma_2$, и равен нулю, если не принадлежит. Это означает, что матрица $J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = J$ есть матрица отношения $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$.

Примечание. Умножение матриц отношений называют максиминным, так как операции сложения и умножения выполняются по правилам максимума и минимума: $a + b = \max(a,b)$, $a \cdot b = \min(a,b)$.

Таким образом, чтобы получить матрицу J композиции отношений $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$, надо перемножить матрицы J_{Γ_1} и J_{Γ_2}: $J = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2}$. Правило умножения матриц бинарных отношений такое же, как и умножения любых матриц n-го порядка:

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \cdot y_{kj},$$

где s_{ij} – элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы J, x_{ik} и y_{kj} – элементы матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2} соответственно. Однако под умножением здесь понимают взятие минимума, а под сложением – взятие максимума:

$$s_{ij} = \max_k(\min(x_{ik}, y_{kj})) \qquad (3.1)$$

В рассматриваемом примере

$$J = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 1\cdot0+1\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 \\ 0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $J = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2}$ выявляет так называемые ***опосредованные связи*** или ***опосредованные влияния***. Например, как видно из рис.3.2, элемент b не влияет на элемент b ни в отношении Γ_1, ни в отношении Γ_2, но в Γ_1 включена пара (b,a), а в Γ_2 – пара (a,b). Таким образом, опосредованно, через a, элемент b влияет на себя в результирующем отношении: $(b,b) \in \Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$.

Введем для строк матриц J_{Γ_1}, J_{Γ_2} и J_{Γ} обозначения:

$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$ – i-я строка матрицы J_{Γ_1},

$\beta_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3})$ – i-я строка матрицы J_{Γ_2},

$\gamma_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3})$ – i-я строка матрицы J_{Γ} $(i = 1,2,3)$.

$$J_{\Gamma_1} = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{\Gamma} = \begin{array}{c} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая строки матриц можно обнаружить, что все элементы $s_{1j}(j=1,2,3)$ первой строки матрицы J_{Γ} ***не меньше*** соответствующих элементов a_{1j}, b_{1j} первых строк матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}, т.е.

$$\begin{cases} s_{11} \geq a_{11} \quad и \quad s_{11} \geq b_{11} \\ s_{12} \geq a_{12} \quad и \quad s_{12} \geq b_{12} \\ s_{13} \geq a_{13} \quad и \quad s_{13} \geq b_{13} \end{cases}.$$

Кратко это можно записать так: $\gamma_1 \geq \alpha_1$ и $\gamma_1 \geq \beta_1$. Аналогичные неравенства справедливы и для вторых строк: $\gamma_2 \geq \alpha_2$ и $\gamma_2 \geq \beta_2$. Для третьих строк оба неравенства $\gamma_3 \geq \alpha_3$ и $\gamma_3 \geq \beta_3$ ложны, так как некоторые элементы этих строк в матрицах J_{Γ_1} и J_{Γ_2} больше соответствующих элементов матрицы J_{Γ}. Неверны и обратные неравенства $\alpha_3 \geq \gamma_3$ и $\beta_3 \geq \gamma_3$. Третья строка матрицы J_{Γ} *не сравнима* с третьими строками матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}. Что касается матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}, то ни одна из строк матрицы J_{Γ_1} не сравнима с соответствующей строкой матрицы J_{Γ_2}.

Рассмотрим композицию отношений $\Gamma_2^2 = \Gamma_2 \circ \Gamma_2$. Найдем матрицу этого отношения:

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x_{ij})_{3\times 3}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (y_{ij})_{3\times 3}.$$

$$J_{\Gamma_2^2} = J_{\Gamma_2}^2 = J_{\Gamma_2} \circ J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ни одна из строк результирующей матрицы не сравнима ни с одной из строк перемножаемых матриц. Опосредованные влияния, не учтенные в Γ_2, обнаруживаются при сравнении матриц J_{Γ_2}, $J_{\Gamma_2}^2$ и определяются элементами $s_{11}, s_{21}, s_{32}, s_{33} \in J_{\Gamma_2}^2$: в матрице J_{Γ_1} элементы $y_{11}, y_{21}, y_{32}, y_{33}$ равны нулю, а $s_{11}, s_{21}, s_{32}, s_{33}$ в матрице $J_{\Gamma_1}^2$ равны единице.

Проанализируем выявленные путем сравнения матриц J_{Γ_2} и $J_{\Gamma_2^2} = J_{\Gamma_2}^2$ опосредованные влияния:

$$s_{11} = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + \mathbf{1\cdot 1} = 1 \Rightarrow \left(\left((a,c) \in \Gamma_2 \wedge (c,a) \in \Gamma_2\right) - \textit{истина}\right) \Rightarrow (a,a) \in \Gamma_2^2,$$
$$s_{21} = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + \mathbf{1\cdot 1} = 1 \Rightarrow \left(\left((b,c) \in \Gamma_2 \wedge (c,a) \in \Gamma_2\right) - \textit{истина}\right) \Rightarrow (b,a) \in \Gamma_2^2,$$
$$s_{32} = \mathbf{1\cdot 1} + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1 \Rightarrow \left(\left((c,a) \in \Gamma_2 \wedge (a,b) \in \Gamma_2\right) - \textit{истина}\right) \Rightarrow (c,b) \in \Gamma_2^2,$$
$$s_{33} = \mathbf{1\cdot 1} + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1 \Rightarrow \left(\left((c,a) \in \Gamma_2 \wedge (a,c) \in \Gamma_2\right) - \textit{истина}\right) \Rightarrow (c,c) \in \Gamma_2^2.$$

В каждой из сумм выделено слагаемое, определяющее значение этой суммы. Выделенные слагаемые соответствуют конъюнкциям высказываний о принадлежности определенного элемента множества A^2 отношению Γ_2, а значение всей суммы – высказыванию о принадлежности соответствующей пары отношению $\Gamma_2^2 = \Gamma_2 \circ \Gamma_2$.

Любой элемент s_{ij} матрицы $J_{\Gamma_1}^2$, меньший или равный элементу $y_{ij}(y_{ij} \in J_{\Gamma_2})$, свидетельствует о том, что либо опосредованная связь учтена в самом отношении Γ_2, либо такая связь отсутствует.

Например, $s_{13} = y_{13} = 1$. Равенство $s_{13} = 1$ означает, что существует опосредованное влияние элемента a на элемент c. Можно видеть, что влияние это осуществляется через элемент b:

$$s_{13} = 0\cdot 1 + \mathbf{1\cdot 1} + 1\cdot 0 = 1 \Rightarrow \left(\left((a,b) \in \Gamma_2 \wedge (b,c) \in \Gamma_2\right) - \textit{истина}\right) \Rightarrow (a,c) \in \Gamma_2^2.$$

Но равенство $y_{13} = 1$ говорит о том, что влияние a на c учтено в самом отношении Γ_2.

Другой пример. Справедливо неравенство $s_{23} < y_{23}$ ($s_{23} = 0, y_{23} = 1$). Запишем элемент s_{23} в виде суммы: $s_{23} = 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$. Во множестве A нет ни одного элемента, через который осуществлялось бы опосредованное влияние b на c. Это становится очевидным, если перевести сложение и умножение в s_{23} на язык логики высказываний. В самом деле, $(b,c) \notin \Gamma_2^2$ – *истина*, так как истинна каждая из следующих конъюнкций:

$$\begin{array}{l} (b,a) \notin \Gamma_2 \wedge (a,c) \in \Gamma_2 \\ (b,b) \notin \Gamma_2 \wedge (b,c) \in \Gamma_2 \\ (b,c) \in \Gamma_2 \wedge (c,c) \notin \Gamma_2 \end{array}.$$

В то же время непосредственная связь между элементами b и c учтена в отношении Γ_2, так как $y_{23} = 1$.

Определение 3.5. Бинарное отношение $\Gamma \subseteq A^2$ называют ***транзитивным бинарным отношением***, если для любых a, b и c $(a,b,c \in A)$ из того, что $(a,c) \in \Gamma$ и $(c,b) \in \Gamma$, вытекает, что $(a,b) \in \Gamma$.

Другими словами, отношение $\Gamma \subseteq A^2$ транзитивно, если оно включает все опосредованные связи между элементами. Отсюда вытекает, что ***условием транзитивности отношения*** Г является выполнение неравенства

$$J_\Gamma \geq J_{\Gamma^2},$$

где J_Γ, J_{Γ^2} – матрицы отношений Г и Γ^2 соответственно, причем каждый элемент матрицы J_Γ не меньше соответствующего элемента матрицы J_{Γ^2}.

Отношения Γ_2 и Γ_2^2 не являются транзитивными. Найдем последовательно матрицы отношений Γ_2^3, Γ_2^4, $\Gamma_2^5, \ldots, \Gamma_2^n$:

$$J_{\Gamma_2^3} = J_{\Gamma_2^2 \cdot \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma_2^4} = J_{\Gamma_2^3 \cdot \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma_2^5} = J_{\Gamma_2^4 \cdot \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma_2^6} = J_{\Gamma_2^5 \cdot \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $J_{\Gamma_2^6} = J_{\Gamma_2^7} = \ldots = J_{\Gamma_2^n}$ $(\forall n (n \in N) : n \geq 6)$.

Определение 3.6. ***Транзитивным замыканием*** $\hat{\Gamma}$ ***бинарного отношения*** $\Gamma \subseteq A^2$ называют объединение степеней этого бинарного отношения:

$$\hat{\Gamma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^n. \tag{3.2}$$

Транзитивное замыкание отношения $\hat{\Gamma}_2$ в рассматриваемом примере имеет вид

$$\hat{\Gamma}_2 = \bigcup_{n=1}^{6} \Gamma_2^n = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\} = A^2.$$

Пусть на множестве $A = \{1,2,3,4\}$ отношение Г задано графом (рис.3.4). Запишем матрицу J_Γ этого отношения и найдем его транзитивное замыкание.

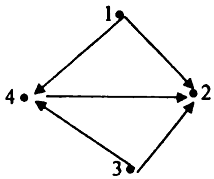


Рис. 3.4. Граф отношения
$\Gamma = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(4,2)\}$
на множестве $A = \{1,2,3,4\}$

Матрица отношения

$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения транзитивного замыкания будем умножать матрицу J_Γ на себя, получая J_Γ^2, $J_\Gamma^3, \ldots, J_\Gamma^n$, до тех пор, пока не выполнится равенство $J_\Gamma^{n-1} = J_\Gamma^n$. Дальнейшее умножение не будет приводить к изменению матриц. Транзитивное замыкание получим по формуле (3.2).

$$J_\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любой элемент матрицы J_Γ^2 не превосходит соответствующий элемент матрицы J_Γ, т.е. $J_\Gamma \geq J_{\Gamma^2}$. Это означает, что Γ включает все опосредованные связи между элементами, а следовательно, Γ является транзитивным бинарным отношением. Покажем, что его транзитивное замыкание совпадает с самим Γ.

$$J_\Gamma^3 = J_\Gamma^2 \cdot J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0).$$

Умножение нуль-матрицы на любую другую матрицу есть нуль-матрица. Поэтому $J_\Gamma^n = (0)$ для любых $n \geq 3$.

Транзитивное замыкание отношения Γ найдем, используя формулу (3.2) и матрицы J_Γ и J_Γ^2:

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(4,2)\} \cup \{(1,2),(3,4)\} =$$

$$= \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(4,2)\} = \Gamma.$$

Как и следовало ожидать, поскольку отношение Γ является транзитивным отношением, оно совпадает со своим транзитивным замыканием.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Транзитивное бинарное отношение совпадает со своим транзитивным замыканием.

Утверждение 2. Транзитивное замыкание бинарного отношения есть наименьшее по числу элементов транзитивное отношение, содержащее данное бинарное отношение.

Утверждение 3. Транзитивное замыкание $\hat{\Gamma}$ есть ближайшее к Γ транзитивное отношение.

Примечание. Напомним, что расстояние между множествами Γ_1 и Γ_2 определяется либо как линейное расстояние, либо как евклидово расстояние (см. табл.3.1).

Не следует думать, что последовательность степеней матрицы отношения всегда имеет предел, т. е. начиная с некоторого шага n выполняется равенство $J_\Gamma^n = J_\Gamma^{n+1}$. Приведем простой пример, показывающий, что это не так.

Пусть матрица отношения Γ на множестве $A = \{a,b\}$ имеет вид $J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$J_{\Gamma^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_{\Gamma^3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_{\Gamma^4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots,\ J_{\Gamma^{2n-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J_{\Gamma^{2n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для любого $n \geq 1$.

Тем не менее $\overline{\Gamma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^n = \{(a,b),(b,a)\} \cup \{(a,a),(b,b)\} = A^2$.

Наиболее важными свойствами бинарных отношений являются *свойства рефлексивности*, *симметричности*, *антисимметричности* и *транзитивности* (табл. 3.1).

Особую роль в приложениях теории бинарных отношений играют *отношения эквивалентности* и *отношения порядка*.

Определение 3.7. ***Отношением эквивалентности*** называют рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.

Определение 3.8. ***Отношением порядка*** называют антисимметричное и транзитивное отношение.

По отношению эквивалентности множество разбивается на непересекающиеся *классы эквивалентности*. В каждый класс попадают элементы, попарно связанные друг с другом отношением эквивалентности, элементы из разных классов отношением не связаны. Пересечение любых двух различных классов пусто, объединение всех классов равно всему множеству.

Отношение порядка делает множество, на котором оно задано, *упорядоченным множеством*. Различают *частичные порядки* и *линейные порядки*. В частично упорядоченном множестве существуют элементы, не связанные от-

Таблица 3.1

Свойства бинарного отношения $\Gamma \subseteq A^2$

Свойство	График Γ	Характеристическое свойство $a\rho b$	Матрица отношения $J_\Gamma = (x_{i,j})_{m \times n}$	Характеристическая функция $\mu(a,b)$
Рефлексивность	$(a,a) \in \Gamma \quad (a \in A)$	$a\rho a$ – истина, $(a \in A)$	$x_{ii} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$	$\mu(a,a) = 1$, $(a \in A)$
Симметричность	$(a,b) \in \Gamma \Rightarrow (b,a) \in \Gamma$ $(a,b \in A)$	$a\rho b \Rightarrow b\rho a$ – истина, $(a,b \in A)$	$x_{ij} = 1 \Rightarrow x_{ji} = 1 (i, j = 1,2,\ldots,n)$ $J_\Gamma = J_\Gamma^T$	$\mu(a,b) = 1 \Rightarrow \mu(b,a) = 1$, $(a,b \in A)$
Антисимметричность	$(a,b) \in \Gamma \wedge (b,a) \in \Gamma \Leftrightarrow a = b$ $(a,b \in A)$	$a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b$ – истина, $(a,b \in A)$	$x_{ij} = 1 \wedge x_{ji} = 1 \Leftrightarrow i = j$ $J_\Gamma \cap J_\Gamma^T \subseteq E$	$\mu(a,b) = 1 \wedge \mu(b,a) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = b$, $(a,b \in A)$
Транзитивность	$(a,b) \in \Gamma \wedge (b,c) \in \Gamma \Rightarrow (a,c) \in \Gamma$ $(a,b,c \in A)$	$a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$ – истина, $(a,b,c \in A)$	$J_\Gamma^2 \subseteq J_\Gamma$	$\mu(a,b) = 1 \wedge \mu(b,c) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu(a,c) = 1$, $(a,b,c \in A)$

Примечание. Символом J_Γ^T обозначена транспонированная матрица J_Γ, символом E – единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

ношением порядка. В линейно упорядоченном множестве каждая пара элементов связана отношением порядка.

3.2. Нечеткие бинарные отношения

Пусть U – какое-либо множество, U^2 – декартов квадрат этого множества.

Определение 3.9. ***Нечетким бинарным отношением на множестве** U* называют нечеткое подмножество U^2:

$$\Gamma = \sum_{U^2} \mu_\Gamma(u_i, u_j)/(u_i, u_j), \tag{3.3}$$

$$\Gamma = \int_{U^2} \mu_\Gamma(x, y)/(x, y). \tag{3.4}$$

Функция принадлежности нечеткого бинарного отношения $\mu_\Gamma(x,y)$ является аналогом характеристической функции в случае обычных бинарных отношений.

Способы задания нечетких бинарных отношений те же, что и в случае обычных отношений.

1. *График нечеткого бинарного отношения.* Формулы (3.3) и (3.4) задают графики нечетких бинарных отношений. Если U – конечное множество, то используется формула (3.3), если U – часть числовой оси или вся числовая ось, – формула (3.4).

2. *Характеристическое свойство нечеткого бинарного отношения.* Например, $a\rho b$: "a имеет сходство с b" (на множестве людей), $a\rho b$: "a много больше, чем b" (на множестве чисел) и т.п.

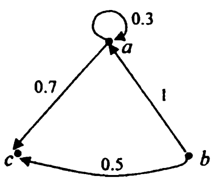


Рис. 3.5. Граф бинарного отношения $\Gamma = 0.3/(a,a)+0.7/(a,c)+1/(b,a)+0.5/(b,c)$ на множестве $U=\{a,b,c\}$

3. *Граф нечеткого бинарного отношения.* Граф нечеткого бинарного отношения – это ориентированный взвешенный граф (рис. 3.5). Каждое ребро $(x,y)(x,y \in U)$ графа имеет вес, равный значению функции принадлежности $\mu_\Gamma(x,y)$.

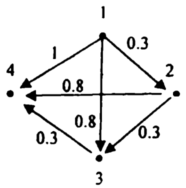
4. *Матрица инциденций нечеткого бинарного отношения.* Матрица $J_\Gamma = (x_{ij})$ бинарного отношения Γ на множестве U,

содержащем n элементов, – это матрица порядка n, элементами которой являются значения функции принадлежности: $x_{ij} = \mu_\Gamma(u_i, u_j)$ $(i = 1,2,...,n, \quad j = 1,2,...,n)$.

Пример

Пусть нечеткое бинарное отношение $a\rho b$: "a значительно меньше, чем b" задано на множестве $U = \{1,2,3,4\}$ и имеет график

$$\Gamma = 0.3/(1,2) + 0.8/(1,3) + 1/(1,4) + 0.3/(2,3) + 0.8/(2.4) + 0.3/(3,4)$$



Граф такого отношения имеет вид, показанный на рисунке, а матрицей отношения является матрица J, в клетках которой записаны значения функции принадлежности для каждого элемента множества U^2:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример нечеткого отношения с непрерывным носителем: $U = R$; $x\rho y$: "x близко к y", график отношения – $\Gamma = \int\limits_{R^2} e^{-\left|\frac{x-y}{2}\right|}/(x,y)$.

Разложение нечетких отношений по α-уровням называют ***декомпозицией нечеткого отношения.*** Декомпозиция нечеткого отношения определяется следующим равенством:

$$\Gamma = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / D_\alpha, \tag{3.5}$$

где $D_\alpha \subseteq U^2$, причем для любой пары (x,y) из множества D_α выполняется неравенство $\mu_\Gamma(x,y) \ge \alpha$. Можно показать, что если $\alpha \le \beta$, то $D_\alpha \subseteq D_\beta$. Раскладывая нечеткое отношение по α-уровням переходят от нечетких отношений к обычным подмножествам множества U^2.

Выполним декомпозицию отношения $\Gamma = \int\limits_{R^2} e^{-\left|\frac{x-y}{2}\right|}/(x,y)$.

$e^{-\left|\frac{x-y}{2}\right|} \ge \alpha$, $(\alpha > 0)$;

$|x-y| \le -2\ln\alpha = -\ln\alpha^2$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge y \\ x - y \le -\ln\alpha^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < y \\ x - y \ge \ln\alpha^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow D_\alpha = \left\{(x,y) \in R^2 : x + \ln\alpha^2 \le y \le x - \ln\alpha^2; (0 < \alpha \le 1)\right\}.$$

Все преобразования выполнены на основании свойств элементарных функций. Семейство областей D_α $(0 < \alpha \le 1)$ (рис. 3.6) представляет систему

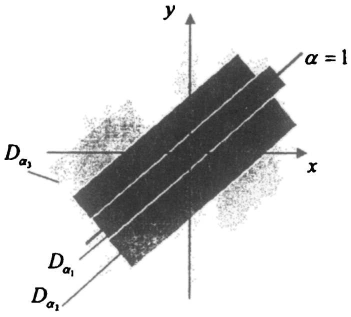


Рис.3.6. Области D_α в декомпозиции $\Gamma = \int\limits_{\alpha\in(0,1]} \alpha / D_\alpha$ нечеткого отношения $\Gamma = \int\limits_{R^2} e^{-\left|\frac{x-y}{2}\right|}/(x,y)$

вложенных друг в друга полос. С уменьшением α ширина полосы возрастает, $\lim\limits_{\alpha\to 0} D_\alpha = R^2$. При $\alpha = 1$ полоса вырождается в прямую $x = y$.

3.3. Композиция и транзитивное замыкание нечетких бинарных отношений

Пусть Γ_1 и Γ_2 – нечеткие отношения на множестве U и $\mu_{\Gamma_1}(x,y)$, $\mu_{\Gamma_2}(x,y)$ – их функции принадлежности.

Определение 3.10. ***Композицией нечетких бинарных отношений*** Γ_1 и Γ_2 называют нечеткое бинарное отношение $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$, причем

$$\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(x,y)/(x,y) = \bigcup_{z\in U}\Big(\big(\mu_{\Gamma_1}(x,z)/(x,z)\big)\cap\big(\mu_{\Gamma_2}(z,y)/(z,y)\big)\Big). \tag{3.6}$$

Пересечение одноточечных нечетких множеств $\mu_{\Gamma_1}(x,z)/(x,z)$ и $\mu_{\Gamma_2}(z,y)/(z,y)$ обычно выполняется по логической T-норме, а объединение по логической T-конорме: $a \cap b = \min(a,b)$, $a \cup b = \max(a,b)$.

При этом формула (3.6) принимает вид

$$\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(x,y)/(x,y) = \Big(\max_{z\in U}\big(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,z),\mu_{\Gamma_2}(z,y))\big)\Big)/(x,y). \tag{3.7}$$

График композиции отношений определяется формулами 3.8 и 3.9.

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \sum_{U^2} \mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x,y)/(x,y) = \sum_{U^2} \left(\max_{z \in U} \left(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,z), \mu_{\Gamma_2}(z,y)) \right) \right) / (x,y), \tag{3.8}$$

если U – конечное множество;

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \int_{U^2} \mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x,y)/(x,y) = \int_{U^2} \left(\max_{z \in U} \left(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,z), \mu_{\Gamma_2}(z,y)) \right) \right) / (x,y), \tag{3.9}$$

если U часть числовой оси или вся числовая ось.

Из формулы (3.6) очевидно, что для случая, когда U – конечное множество, матрица композиции отношений $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$ есть максиминное произведение матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}:

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = \left(\max_k (\min(\mu_{\Gamma_1}(u_i, u_k), \mu_{\Gamma_2}(u_k u_j)) \right)_{n \times n} = \left(\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(u_i, u_j) \right)_{n \times n},$$

где n – число элементов множества U.

Пусть, например, нечеткие отношения $a \rho_1 b$: "*а примерно равно b*" и $a \rho_2 b$: "*а немного больше b*" на множестве $U = \{1,2,3,4,5\}$ заданы матрицами:

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$.

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} \circ J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, как найдены некоторые элементы матрицы $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$:

$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(1.1) = \max(\min(1,0), \min(0.7,1), \min(0.2,0.4), \min(0,0.1), \min(0,0)) = \max(0,0.7,0.2,0,0) = 0.7$;

$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(1.2) = \max(\min(1,0), \min(0.7,0), \min(0.2,1), \min(0,0.4), \min(0,0.1)) = \max(0,0,0.2,0,0) = 0.2$

и т.д.

Рассмотрим опосредованные влияния в композиции отношений $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Например, $\mu_{\Gamma_1}(3,1) = 0.2 < 0.5$, $\mu_{\Gamma_2}(3,1) = 0.4 \le 0.5$, т.е. по оценкам экспертов, высказывания "3 примерно равно 1" и "3 немного больше 1" в данном случае скорее ложны, чем истинны. Но $\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(3,1) = 0.7 > 0.5$, т.е. опосредованная связь между 3 и 1 явно имеется. Какие же элементы являются посредниками этого влияния?

Чтобы ответить на этот вопрос, составим схему вычисления $\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(3.1)$:

$$\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(3,1)=\max(\min(\overbrace{0.2,0}^{\mu_{\Gamma_1}(3,1),\mu_{\Gamma_2}(1,1)}),\ \min(\overbrace{0.7,1}^{\mu_{\Gamma_1}(3,2),\mu_{\Gamma_2}(2,1)}),\min(\overbrace{1,0.4}^{\mu_{\Gamma_1}(3,3),\mu_{\Gamma_2}(3,1)}),\min(\overbrace{0.7,0.1}^{\mu_{\Gamma_1}(3,4),\mu_{\Gamma_2}(4,1)}),\min(\overbrace{0.2,0}^{\mu_{\Gamma_1}(3,5),\mu_{\Gamma_2}(5,1)}))=0.7.$$

Выделенное слагаемое, которое определяет значение $\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(3,1)=0.7$, есть минимум $\mu_{\Gamma_1}(3,2)$ и $\mu_{\Gamma_2}(2,1)$:

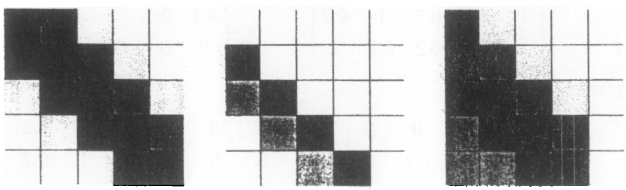
$$3\ \overset{\mu=0.7}{\textit{примерно}\ \textit{равно}}\ 2\ \text{и}\ 2\ \overset{\mu=1}{\textit{немного}\ \textit{больше}}\ 1.$$

Из этого следует

$$3\ \overset{\mu=0.7}{\textit{примерно}\ \textit{равно},\ \textit{причем}\ \textit{чуть}\ \textit{больше}}\ 1.$$

Таким образом, влияние 3 на 1 в композиции отношений $\Gamma_1\circ\Gamma_2$ данного примера осуществляется через 2.

Представим каждую матрицу J_{Γ_1}, J_{Γ_2} и $J_{\Gamma_1}\circ J_{\Gamma_2}$ в виде поля клеток 5×5, в котором значения функции принадлежности $\mu(u_i,u_j)$ соответствуют интенсивности окрашивания клетки (i,j) (рис. 3.7).



J_{Γ_1} $\qquad$ J_{Γ_2} $\qquad$ $J_{\Gamma_1}\circ J_{\Gamma_2}$

Рис. 3.7. Матрицы нечетких бинарных отношений в виде полей клеток

Пусть теперь a, b и c три психологических характеристики личности человека: a – интеллект, b – сила воли, c – трудолюбие ($U=\{a,b,c\}$). По оценкам экспертов, влияние друг на друга этих качеств определено, например, следующей матрицей:

$$J_{\Gamma}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0 & 0.2 & 1\\ 0.9 & 0.5 & 0\end{pmatrix}.$$

Интерпретируем некоторые элементы матрицы J_{Γ}.

Влияние интеллекта на силу воли эксперты сочли индифферентным: оно в равной степени может быть или не быть ($\mu_\Gamma(a,b)=0.5$), а вот влияние силы воли на трудолюбие по оценке экспертов очень сильно ($\mu_\Gamma(b,c)=1$).

Выявим опосредованные влияния этих качеств друг на друга. Для этого найдем матрицу композиции $\Gamma\circ\Gamma=\Gamma^2$:

$$J_{\Gamma^2}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0 & 0.2 & 1\\ 0.9 & 0.5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0 & 0.2 & 1\\ 0.9 & 0.5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.9 & 0.5 & 0\\ 0.8 & 0.5 & 0.7\end{pmatrix}.$$

Матрица J_{Γ^2} обнаруживает весьма существенные опосредованные влияния показателя b (силы воли) на показатель a (интеллект):

$$\mu_\Gamma(b,a)=0,\qquad \mu_{\Gamma^2}(b,a)=0.9,$$

а также показателя c (трудолюбие) на себя:

$$\mu_\Gamma(c,c)=0,\qquad \mu_{\Gamma^2}(c,c)=0.7.$$

Проанализируем, каким образом возникают эти влияния.

1. $\mu_{\Gamma^2}(b,a)=\max(\min(0,0.8),\min(0.2,0),\mathbf{\min(1,0.9)})=0.9$.

Используя названия этих показателей (a – интеллект, b – сила воли, c – трудолюбие), вывод об опосредованном влиянии силы воли на интеллект можно записать такой фразой:

"Силой воли можно воспитать трудолюбие ($\mu_\Gamma(b,c)=1$),

трудолюбие усиливает интеллект ($\mu_\Gamma(c,a)=0.9$)".

Из этого следует вывод:

"Сила воли через воспитание трудолюбия усиливает интеллект ($\mu_{\Gamma^2}(b,a)=0.9$)".

2. $\mu_{\Gamma^2}(c,c)=\max(\mathbf{\min(0.9,0.7)}\ \min(0.5,0),\min(0,0))=0.7$:

"Трудолюбие повышает интеллект ($\mu_\Gamma(c,a)=0.9$)

интеллект усиливает трудолюбие ($\mu_\Gamma(a,c)=0.7$)".

Следовательно,

"Трудолюбие дополнительно усиливается через интеллект ($\mu_\Gamma(c,c)=0.7$)".

Вычислим матрицы более высоких степеней отношения Γ:

$$J_{\Gamma^3}=J_{\Gamma^2\circ\Gamma}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.9 & 0.5 & 0\\ 0.8 & 0.5 & 0.7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0 & 0.2 & 1\\ 0.9 & 0.5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.8 & 0.5 & 0.7\end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma^4}=J_{\Gamma^3\circ\Gamma}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.8 & 0.5 & 0.7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0 & 0.2 & 1\\ 0.9 & 0.5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.8 & 0.5 & 0.7\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $J_{\Gamma^n} = J_{\Gamma^3}$ для любого $n \geq 3$.

Найдем транзитивное замыкание нечеткого отношения Γ, т.е. объединение всех степеней отношения Γ. Значение функции принадлежности пары $(u_i, u_j)(u_i, u_j \in U)$ по правилу логической T-конормы имеет вид

$$\mu_{\overline{\Gamma}}(u_i, u_j) = \max(\mu_\Gamma(u_i, u_j),\ \mu_{\Gamma^2}(u_i, u_j), \ldots, \mu_{\Gamma^n}(u_i, u_j), \ldots). \tag{3.10}$$

В данном примере

$\max(\mu_\Gamma(u_i, u_j),\ \mu_{\Gamma^2}(u_i, u_j), \ldots, \mu_{\Gamma^n}(u_i, u_j), \ldots) = \max(\mu_\Gamma(u_i, u_j),\ \mu_{\Gamma^2}(u_i, u_j), \mu_{\Gamma^3}(u_i, u_j))$.

Этот максимум находим, сравнивая элементы, стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца в матрицах $J_\Gamma, J_{\Gamma^2}, J_{\Gamma^3}$, и выбирая наибольший:

$\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 = 0.8/(a,a) + 0.5/(a,b) + 0.7/(a,c) + 0.9/(b,a) + 0.5/(b,b) + 1/(b,c) +$

$+ 0.9/(c,a) + 0.5/(c,b) + 0.7/(c,c)$.

Изобразим цветовыми оттенками матрицы степеней отношения Γ и его транзитивного замыкания (рис. 3.8).

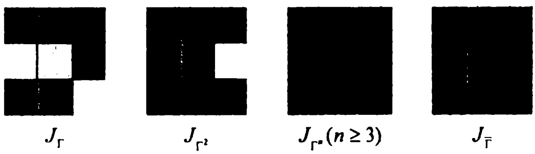


Рис. 3.8. Матрицы степеней нечеткого отношения Γ
и транзитивного замыкания этого отношения

Свойство транзитивности нечеткого бинарного отношения определяется через матрицу отношения.

Определение 3.11. Нечеткое бинарное отношение Γ называют ***транзитивным***, если каждый элемент матрицы J_Γ^2 не превосходит соответствующий элемент матрицы J_Γ, т.е. $J_\Gamma^2 \leq J_\Gamma$.

Эквивалентное определение транзитивности нечеткого отношения можно дать через функцию принадлежности $\mu_\Gamma(x, y)(x, y \in U)$.

Определение 3.12. Нечеткое бинарное отношение Γ называют ***транзитивным***, если для любой пары $(x, y) \in U^2$ справедливо неравенство

$$\mu_\Gamma(x, y) \geq \max_{z \in U}(\min(\mu_\Gamma(x, z), \mu_\Gamma(z, y))).$$

С практической точки зрения значительно более удобным является определение 3.11.

Определение транзитивного замыкания $\hat{\Gamma}$ ***нечеткого*** бинарного отношения $\Gamma = \sum_{U^2} \mu_\Gamma(u_i, u_j)/(u_i, u_j)$ или $\Gamma = \int_{U^2} \mu_\Gamma(x, y)/(x, y)$ совпадает с определением 3.6 транзитивного замыкания обычного отношения. При этом нахождение степеней отношения и операция объединения выполняются по правилам оперирования с нечеткими множествами.

Так же, как и в случае обычных бинарных отношений, любое нечеткое транзитивное отношение Γ совпадает со своим транзитивным замыканием $\hat{\Gamma}$, а транзитивное замыкание есть наименьшее транзитивное отношение, включающее в себя отношение Γ.

3.4. Свойства и виды нечетких бинарных отношений

Основными свойствами любых бинарных отношений являются рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность (см. табл.3.1). В табл. 3.2 эти свойства записаны в символах теории нечетких множеств. Определение свойства транзитивности не дается, так как оно подробно рассмотрено в предыдущем разделе.

Обычные отношения, обладающие свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, являются отношениями эквивалентности, антисиммеричные и транзитивные отношения – отношениями порядка.

Отношения эквивалентности разбивают множества на классы эквивалентности, отношения порядка – упорядочивают множества.

Таблица 3.2

Свойства нечетких бинарных отношений

$\Gamma = \sum_{U^2} \mu_\Gamma(u_i, u_j)/(u_i, u_j)$, $\Gamma = \int_{U^2} \mu_\Gamma(x, y)/(x, y)$

Свойство	Матрица отношения $J_\Gamma = (\mu_\Gamma(u_i, u_j))_{n \times n}$	Характеристическая функция $\mu_\Gamma(x, y)$
1	2	3
Рефлексивность	$\forall u_i (u_i \in U)$: $\mu_\Gamma(u_i, u_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$	$\forall x (x \in U)$: $\mu_\Gamma(x, x) = 1$
Антирефлексивность	$\forall u_i (u_i \in U)$: $\mu_\Gamma(u_i, u_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$	$\forall x (x \in U)$: $\mu_\Gamma(x, x) = 0$

Окончание табл.3.2

1	2	3
Симметричность	$J_Г = J_Г^T$	$\forall(x,y)(x,y\in U):$ $\mu_Г(x,y)=\mu_Г(y,x)$
Антисимметричность	$\forall u_i,u_j(u_i,u_j\in U, i\neq j):$ $(\mu_Г(u_i,u_j)\neq\mu_Г(u_j,u_i))\vee$ $\vee(\mu_Г(u_i,u_j)=\mu_Г(u_j,u_i)=0)$	$\forall(x,y)(x,y\in U, x\neq y)$ $(\mu_Г(x,y)\neq\mu_Г(y,x))\vee$ $\vee(\mu_Г(x,y)=\mu_Г(y,x)=0)$

Виды нечетких отношений представлены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Виды нечетких бинарных отношений

Вид отношения	Свойства				
	Рефлексивность	Антирефлексивность	Транзитивность	Симметричность	Антисимметричность
Предпорядок	+		+		
Сходство	+			+	
Несходство		+		+	
Подобие	+		+	+	
Порядковое	+				+
Нестрогий порядок	+		+		+
Строгий порядок		+	+		+

Примечание. В каждой строке табл. 3.3 знаками "+" отмечены те свойства, которыми должно обладать отношение, чтобы его можно было отнести к указанному виду отношений.

Отношение предпорядка. Покажем, что если отношение Г рефлексивно, то $J_Г^2 \geq J_Г$. В самом деле, рефлексивность отношения означает, что все числа главной диагонали матрицы $J_Г$ – единицы:

$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & 1 & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $s_{ij} (i, j = 1,2,...,n)$ матрицы J_Γ^2 есть максиминное произведение i-й строки матрицы J_Γ на ее j-й столбец:

$$s_{ij} = \max_k(\min(\mu_{ik}\mu_{kj})) = \max(\min(\mu_{i1}, \mu_{1j}), \min(\mu_{i2}, \mu_{2j}),..., \min(\mu_{ii}, \mu_{ij}),...\min(\mu_{in}, \mu_{nj})) =$$

$$= \max(\min(\mu_{i1}, \mu_{1j}), \min(\mu_{i2}, \mu_{2j}),..., \min(1, \mu_{ij}),..., \min(\mu_{in}, \mu_{nj})) =$$

$$= \max(\min(\mu_{i1}, \mu_{1j}), \min(\mu_{i2}, \mu_{2j}),..., \mu_{ij},..., \min(\mu_{in}, \mu_{nj})) \geq \mu_{ij}.$$

Отношение предпорядка выделяет из всех рефлексивных отношений транзитивные отношения. Транзитивные нечеткие отношения играют особую роль в приложениях теории нечетких множеств, так как определяют некоторую правильную структуру множества, на котором они заданы. Если отношение Γ не является транзитивным, то ближайшим к нему транзитивным отношением будет транзитивное замыкание Γ.

Отношение сходства. Нечеткое отношение сходства задается с помощью матриц сходства либо неориентированных взвешенных графов [5]. Матрицы отношений сходства, для которых свойства рефлексивности и симметричности имеют естественную интерпретацию, могут быть получены в результате как измерения некоторого физического параметра, отражающего связи между объектами, так и опроса экспертов, которые для каждой пары объектов из U указывают их степень сходства по некоторой шкале сравнений. Градации этой шкалы могут быть составлены из слов русского языка, отражающих силу сходства между объектами и линейно упорядоченных между собой. Например, такая шкала может состоять из фраз типа: "очень сильное сходство", "сильное сходство", "сходство средней силы", "слабое сходство", "очень слабое сходство" и т.п.

Отношение несходства в определенном смысле является противоположным отношению сходства. Действительно, если $\Gamma \subseteq A^2$ является рефлексивным и симметричным отношением, то его дополнение $\overline{\Gamma}$ представляет собой антирефлексивное и симметричное отношение[1].

---

[1] Верно и обратное утверждение, если $\overline{\Gamma}$ является антирефлексивным и симметричным отношением (отношение несходства), то противоположное ему отношение Γ рефлексивно и симметрично (отношение сходства).

Пусть, например, имеется матрица рефлексивного и симметричного отношения (отношения сходства):

$$J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значения функции принадлежности противоположного ему отношения $\overline{\Gamma}$, т. е. дополнения Γ до A^2, находим по правилу

$$\mu_{\overline{\Gamma}}(u_i,u_j) = 1 - \mu_{\Gamma}(u_i,u_j), \qquad ((u_i,u_j) \in A^2)$$

(см. табл. 1.5). Используя эту формулу, получаем

$$J_{\overline{\Gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.2 & 0.4 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $J_{\overline{\Gamma}}$ является матрицей антирефлексивного и симметричного отношения, т. е. отношения несходства (см. табл. 3.3).

Отношение подобия выделяется из класса отношений сходства добавлением свойства транзитивности (см. табл. 3.3), что обеспечивает возможность разбиения множества A на классы подобия.

Пусть, например, отношение сходства Γ на множестве $A = \{1,2,3,4\}$ задано матрицей инциденций:

$$J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 & 1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, транзитивно ли отношение Γ:

$$J_{\Gamma^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 1 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}; \ \Gamma \subseteq \Gamma^2.$$

Следовательно, Γ не является транзитивным отношением. Найдем ближайшее к Γ транзитивное отношение, т. е. транзитивное замыкание $\hat{\Gamma}$:

$$\hat{\Gamma} = \bigcup_{n=1,2,\ldots} \Gamma^n.$$

Для этого вычислим матрицы инциденций следующих степеней отношения Γ:

$$J_{\Gamma^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 1 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 & 1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\Gamma^4, \Gamma^5, \ldots$ совпадут с Γ^3. Следовательно, $\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3$, причем $J_{\Gamma^3} \geq J_{\Gamma^2} \geq J_{\Gamma}$, а значит $\hat{\Gamma} = \Gamma^3$ – транзитивное замыкание отношения Γ, т.е. Γ^3 – ближайшее к Γ транзитивное отношение.

Построим графы отношений $\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3$ по множествам α-уровня (рис. 3.9 – 3.11).

Примечание. Поскольку обычные и нечеткие бинарные отношения определяются как подмножества универсального множества U^2 (см. определения 3.2, 3.9), то понятие множества α-уровня (см. разд. 1.3) естественным образом распространяется и на случай бинарных отношений.

Анализируя последовательность графов на рис. 3.9, можно видеть, что при $\alpha = 0.2$ множество $A = \{1,2,3,4\}$ объединено отношением в один класс, так как все элементы множества связаны отношением Γ. При $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.6$ классы не образуются, поскольку некоторые элементы A отношением Γ не связаны. При $\alpha = 0.8$ множество A распадается на три непересекающихся класса: $A = \{1,3\} \cup \{2\} \cup \{4\}$, а при $\alpha = 1$ – на четыре одноточечных класса: $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$.

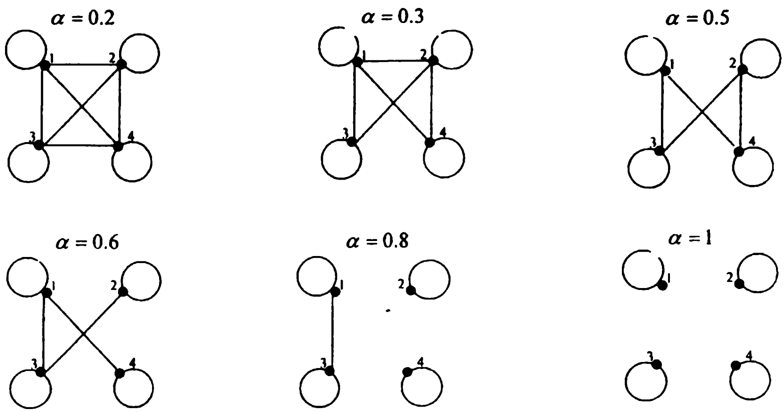


Рис. 3.9. Графы отношения Γ, построенные по множествам уровня α

Анализ последовательности графов на рис. 3.10 показывает, что при $\alpha = 0.5$ множество $A = \{1,2,3,4\}$ объединено в один класс, так как все его элементы связаны отношением Γ^2. При $\alpha = 0.6$ и $\alpha = 0.8$ классы не образуются, поскольку некоторые элементы A отношением Γ^2 не связаны. При $\alpha = 1$ множество A распадается на четыре одноточечных класса: $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$.

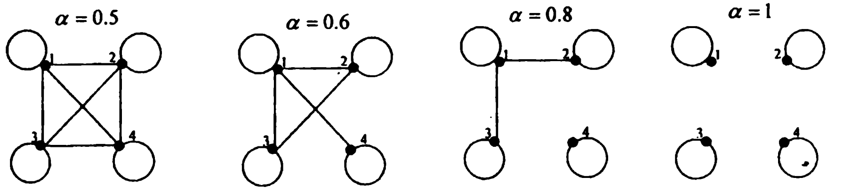


Рис. 3.10. Графы отношения Γ^2, построенные по множествам уровня α

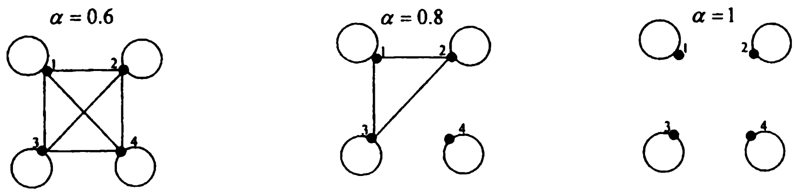


Рис. 3.11. Графы отношения $\hat{\Gamma} = \Gamma^3$, построенные по множествам уровня α

Транзитивное отношение $\hat{\Gamma} = \Gamma^3$ (см. рис. 3.11) разбивает $A = \{1,2,3,4\}$ на непересекающиеся классы при любых значениях α. Все элементы, попадающие в один класс, попарно связаны друг с другом этим отношением. Если $\alpha = 0.6$, то образуется один класс: $A = \{1,2,3,4\}$, при $\alpha = 0.8$ – два класса: $A = \{1,2,3\} \cup \{4,\}$, при $\alpha = 1$ – четыре класса: $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$.

Рассмотренный пример иллюстрирует справедливость следующего *утверждения* о нечетких отношениях подобия (рефлексивных, симметричных и транзитивных отношениях).

Утверждение. Нечеткое отношение подобия на любом α-уровне разбивает несущее множество на непересекающиеся классы.

Если нечеткое отношение является каким-либо из ***отношений порядка***, (см. табл.3.3), то ему обычно придается смысл "предпочтения", "доминирования", "подчиненности". В этих случаях транзитивность обеспечивает возможность естественного упорядочения объектов, выделения "наилучших", "недоминируемых" объектов и т.п.

3.5. Нечеткие бинарные соответствия

Определение 3.13. ***Бинарным соответствием на множестве*** $A \times B$ называют подмножество Γ декартова произведения множеств A и B: $\Gamma \subseteq A \times B$.

Декартово произведение $A \times B$ – это множество всех пар, в которых на первом месте стоит элемент множества A, а на втором – элемент множества B. Бинарные отношения $\Gamma \subseteq A^2$ (см. разд. 3.1–3.4) можно рассматривать как частный случай бинарных соответствий, когда $A = B$. Бинарные соответствия (обычные и нечеткие) задают так же, как и бинарные отношения.

1. *График* Γ *нечеткого бинарного соответствия* – $\Gamma \subseteq A \times B$.

2. *Характеристическое свойство нечеткого бинарного соответствия* – $a \rho b (a \in A, b \in B)$.

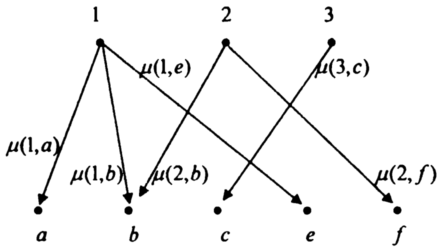


Рис. 3.12. Ориентированный взвешенный двудольный граф, граф бинарного соответствия $\Gamma \subseteq A \times B$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,e,f\}$

3. *Граф нечеткого бинарного соответствия* – ориентированный взвешенный двудольный граф (рис. 3.12).

Направление стрелок – от элементов множества A к элементам множества B; веса ребер– функции принадлежности $\mu(a,b)$ нечеткого соответствия.

4. *Матрица инциденций нечеткого бинарного соответствия* $\Gamma \subseteq A \times B$ имеет вид $J_\Gamma = (x_{ij})_{m \times n}$, где m – число элементов множества A, n – число элементов множества B, $x_{ij} = \mu(a_i, b_j)$ – значение функции принадлежности пары $(a_i, b_j), (a_i \in A, b_j \in B)$ бинарному соответствию Γ.

Пусть даны множества A={*понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье*} – множество дней недели, B={*солнечно, тепло, ветрено, дождь, гроза, резкое похолодание*} – погодные условия. На множестве $A \times B$ задано бинарное соответствие $a \rho b$: "*в день a ожидается погода b*" $(a \in A, b \in B)$. Синоптики задали свой прогноз матрицей инциденций:

$$J_\rho=\begin{pmatrix}0.6&0.7&0&0&0.3&0\\0.2&0&0.8&0.6&0&0\\0&0&0.6&0.9&0.5&0.8\\0.3&0.5&0.3&0.4&0&0.4\\0.2&0.5&0.7&0.8&0.1&0.1\\0.5&0.5&0.6&0.7&0.3&0.5\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\end{pmatrix}.$$

Как видно из матрицы инциденций, синоптики предполагают, что, к примеру, вторник (вторая строка матрицы инциденций) вряд ли будет солнечным ($\mu(\textit{вторник},\ \textit{солнечно})=0.2$), наверняка, не будет теплым ($\mu(\textit{вторник},\ \textit{тепло})=0$), скорей всего будет ветряным ($\mu(\textit{вторник},\ \textit{ветрено})=0.8$), возможно, будет дождь ($\mu(\textit{вторник},\ \textit{дождь})=0.6$), но грозы и резкого похолодания не предвидится ($\mu(\textit{вторник},\ \textit{гроза})=0$, $\mu(\textit{вторник},\ \textit{резкое похолодание})=0$).

Композиция бинарных соответствий определяется аналогично композиции бинарных отношений (см. определение 3.10):

Определение 3.14. ***Композицией нечетких бинарных соответствий*** $\Gamma_1\subseteq A\times B$ и $\Gamma_2\subseteq B\times C$ называют нечеткое бинарное соответствие $\Gamma=\Gamma_1\circ\Gamma_2\subseteq A\times C$, причем

$$\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(x,y)/(x,y)=\bigcup_{z\in B}\left(\mu_{\Gamma_1}(x,z)/(x,z)\cap\mu_{\Gamma_2}(z,y)/(z,y)\right)\quad(x\in A, y\in C). \tag{3.11}$$

Пересечение одноточечных нечетких множеств $\mu_{\Gamma_1}(x,z)/(x,z)\cap\mu_{\Gamma_2}(z,y)/(z,y)$ так же, как и в случае бинарных отношений, обычно выполняется по логической T-норме, а объединение по логической T-конорме:

$$a\cap b=\min(a,b),\ a\cup b=\max(a,b).$$

При этом формула (3.11) принимает вид

$$\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(x,y)/(x,y)=\left(\max_{z\in B}\left(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,z),\mu_{\Gamma_2}(z,y))\right)\right)/(x,y)\quad(x\in A, y\in C). \tag{3.12}$$

График композиции соответствий определяется формулами:

$$\Gamma_1\circ\Gamma_2=\sum_{A\times C}\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(x,y)/(x,y)=\sum_{A\times C}\left(\max_{z\in B}\left(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,z),\mu_{\Gamma_2}(z,y))\right)\right)/(x,y), \tag{3.13}$$

если A, B и C – конечные множества;

$$\Gamma_1\circ\Gamma_2=\int_{A\times C}\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(x,y)/(x,y)=\int_{A\times C}(\max_{z\in B}(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,z),\mu_{\Gamma_2}(z,y))/(x,y), \tag{3.14}$$

если множества A, B и C представляют собой промежуток числовой оси или всю числовую ось.

Из формулы (3.12) очевидно, что для случая, когда A, B и C – конечные множества, матрица композиции отношений $J_{\Gamma_1 \bullet \Gamma_2}$ есть максиминное произведение матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}:

$$J_{\Gamma_1 \bullet \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = \left(\max_{k=1,2,\dots,p} (\min(\mu_{\Gamma_1}(x_i, z_k), \mu_{\Gamma_2}(z_k y_j)) \right)_{m \times n} = \left(\mu_{\Gamma_1 \bullet \Gamma_2}(x_i, y_j) \right)_{m \times n},$$

где m – число элементов множества A; p – число элементов множества B; n – число элементов множества C.

Композиция бинарных соответствий, так же как и композиция бинарных отношений, выявляет скрытые, опосредованные связи между элементами множеств A и C, если заданы соответствия на множествах $A \times B$ и $B \times C$.

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ – качества личности, где x_1 – интеллект, x_2 – сила воли, x_3 – трудолюбие; $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ – социальные показатели, где z_1 – успешность в бизнесе, z_2 – среднемесячный доход, z_3 – жилищные условия, z_4 – семейное положение, $C = \{y_1, y_2\}$ – показатели качества жизни, где y_1 – число детей в семье, y_2 – регулярность отдыха. Пусть также, по оценкам экспертов, влияние друг на друга этих качеств определено следующими матрицами:

$$J_1 = J_{\Gamma_1 \bullet \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 0.9 & 0.7 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}; \quad J_2 = J_{\Gamma_2 \bullet \Gamma_1} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 \\ 1 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Выявим скрытые опосредованные влияния качеств личности на качества жизни. Для этого перемножим матрицы J_1 на J_2:

$$J = J_1 \cdot J_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 0.9 & 0.7 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 \\ 1 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Интерпретируем наиболее значимые опосредованные влияния качеств личности на качества жизни:

1) $s_{11} = 0.9$; $s_{11} = \max(\min(0.8,0.8), \min(0.5,0.2), \min(0.2,0.9), \min(0.9,1)) = 0.9$.

Значение логической суммы $s_{11} = 0.9$ определяется выделенным слагаемым $\min(0.9,1)$, которое представляет собой логическое произведение функций принадлежности $\mu_1(x_1, z_4) \cdot \mu_2(z_4, y_1)$. Используя названия показателей (x_1 – интеллект, z_4 – семейное положение, y_1 – число детей в семье), вывод об опосредованном влиянии x_1 на y_1 можно записать такой фразой:

"Интеллект влияет на семейное положение ($\mu_1(x_1, z_4) = 0.9$),

семейное положение определяет число детей в семье ($\mu_2(z_4, y_1) = 1$)".

Из этого следует вывод:

"Интеллект, обеспечивая устойчивое семейное положение, оказывает большое влияние на число детей в семье".

2) $s_{21} = 0.8$; $s_{11} = \max(\,\mathbf{min(1, 0.8)}, \min(0.9, 0.2), \min(0.7, 0.9), \min(0.3, 1)\,) = 0.8$.

Выделенное слагаемое является произведением $\mu_1(x_2, z_1) \cdot \mu_2(z_1, y_1)$. Применив аналогичные рассуждения в этом случае, запишем:

"Сила воли (x_2) определяет успешность в бизнесе (z_1, $\mu_1(x_2, z_1) = 1$),

успешность в бизнесе (z_1) позволяет планировать число детей в семье (y_1, $\mu_2(z_1, y_1) = 0.8$)".

Из этого следует вывод:

"Сила воли, определяя успешность бизнеса, оказывает большое влияние на число детей в семье".

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$ – члены семьи Ивановых. На множестве A задано отношение $x \rho y$: "*x внешне похож на y*" $(x, y \in A)$.

1) Задайте график отношения ρ.

2) Постройте граф отношения.

3) Запишите матрицу инциденций отношения.

4) Проверьте, является ли отношение транзитивным, и запишите матрицу его транзитивного замыкания (если оно существует).

2. На отрезке $U = [-1, 1]$ задано нечеткое отношение $\Gamma = \int\limits_{U^2} \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) / (x, y)$.

Выполните декомпозицию отношения и запишите множества α-уровня для $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. На множестве $U = \{1, 2, 3, 4\}$ заданы бинарные отношения:

$\Gamma_1 = 1/(1,1) + 0.8/(1,3) + 1/(2,1) + 1/(2,2) + 0.4/(2,4) + 0.7/(3,1) + 1/(3,3) + 0.6/(4,2) + 1/(4,4)$,

$\Gamma_2 = 1/(1,2) + 0.8/(1,3) + 1/(1,4) + 1/(2,3) + 0.4/(2,4) + 0.7/(3,1) + 1/(3,2) + 0.6/(4,2) + 1/(4,3)$.

1) Постройте графы отношений.

2) Запишите матрицы инциденций отношений Γ_1 и Γ_2.

3) Найдите матрицу инциденций и график композиции отношений $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$.

4. На множестве $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ задано отношение:

$x\rho y$: "*x оказывает влияние на* y" $(x, y \in U)$,

матрица инциденций которого имеет вид

$$J_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 1 & 1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.8 & 0.8 & 1 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 1 & 0.7 & 1 \\ 0.3 & 0.4 & 1 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выявите и интерпретируйте наиболее существенные опосредованные влияния элементов множества друг на друга.

5. Пусть $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – несколько девушек Вашей группы.

На множестве U заданы отношения:

$x\rho_1 y$: "*x такая же симпатичная, как* y" $(x, y \in U)$,

$x\rho_2 y$: "*x немного старше, чем* y" $(x, y \in U)$,

$x\rho_3 y$: "*x и y учатся, примерно одинаково*" $(x, y \in U)$.

1) Задайте матрицы инциденций этих отношений так, чтобы отношения обладали свойствами:

а) ρ_1 – антирефлексивности и симметричности;

б) ρ_2 – антирефлексивности и антисимметричности;

в) ρ_3 – рефлексивности и симметричности.

2) Определите, есть ли среди полученных отношений отношения сходства, отношения несходства, отношения подобия, отношения строгого или нестрогого порядков. Ответ обоснуйте.

6. Выпишите матрицы инциденций отношений ρ_1, ρ_2 и ρ_3 из задания 5.

1) Для каждого из отношений запишите множества α-уровня для $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$. Постройте графы обычных отношений для каждого из множеств α-уровня.

2) Найдите транзитивные замыкания отношений ρ_1, ρ_2 и ρ_3 (если они существуют) и постройте множества α-уровня и их графы для каждого из транзитивных замыканий.

7. На множествах $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ и $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ матрицами инциденций заданы бинарные отношения:

$$J_A=\begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.9 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.9 & 1 & 0 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.8 & 1 & 0.2 \\ 1 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } J_B=\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.5 \\ 0.7 & 1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 0.6 & 1 \end{pmatrix},$$

которые будем интерпретировать как отношения влияния элементов друг на друга внутри множеств A и B.

Также с помощью матрицы задано соответствие на множестве $A\times B$:

$$J_{A\times B}=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.3 & 0.6 \\ 1 & 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Выявите и интерпретируйте опосредованные влияния элементов внутри множеств A и B.

2) Выявите и интерпретируйте опосредованные влияния элементов множества A на элементы множества B, используя матрицы:

а) $J_A\cdot J_{A\times B}$;

б) $J_{A\times H}\cdot J_B$;

в) $J_A\cdot J_{A\times B}\cdot J_B$.

4. ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ

4.1. Понятие лингвистической переменной

В школьном курсе математики значениями переменных являются числа. Такие переменные величины называют числовыми переменными. Например, предложение $x = 3$ означает, что числовой переменной x присвоено значение 3.

Принципиальное отличие лингвистической переменной от переменной числовой состоит в том, что ее значениями являются не числа, а слова или предложения в естественном или формальном языке. Лингвистическая переменная дает возможность приближенно описывать явления, которые настолько сложны, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах.

Пусть лингвистическая переменная X имеет смысл "*возраст*". С переменной X связано универсальное множество $U = [0,100]$, каждый элемент которого есть число лет, прожитых человеком. Однако значениями лингвистической переменной X являются не числа из множества U, а слова: "*молодой*", "*немолодой*", "*старый*", "*очень старый*", "*не молодой и не старый*" и т.п. По аналогии с числовой переменной предложение "*возраст*"="*молодой*" означает, что лингвистической переменной "*возраст*" присвоено значение "*молодой*". Слова, являющиеся значениями лингвистической переменной, называются ***термами*** и объединяются в ***терм-множество*** $T(X)$. Так, терм-множество лингвистической переменной "*возраст*" составляют указанные выше слова.

Термы можно рассматривать как имена нечетких множеств, заданных на универсальном множестве U и имеющих определенную функцию принадлежности. Если X – элемент терм-множества лингвистической переменной X, то это есть название нечеткого множества $X = \sum_U \mu_X(u)/u$ или $X = \int_U \mu_X(u)/u$.

К примеру, одно из возможных значений лингвистической переменной "*возраст*" является терм "*старый*". Это есть название нечеткого подмножества X_1 универсального множества $U = [0,100]$. Функция принадлежности нечеткого множества X_1="*старый*" может иметь вид $\mu_{X_1}(u) = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$. Другой возможный терм X_2="*очень старый*". Его функцию принадлежности можно полу-

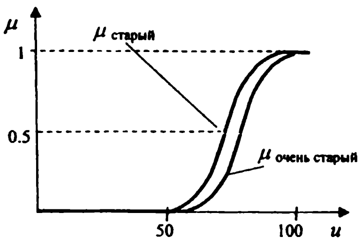


Рис. 4.1. Графики функций принадлежности нечетких множеств "*старый*" и "*очень старый*"

чить, применив к нечеткому множеству X_1 операцию концентрирования (см. формулу (1.7)): $\mu_{X_2}(u) = \left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2}$.

Построим графики функций принадлежности $\mu_{\text{старый}} = \mu_{X_1}(u)$ и $\mu_{\text{очень старый}} = \mu_{X_1}(u)$ нечетких множеств X_1 и X_2 (рис. 4.1).

Запишем нечеткие множества X_1 и X_2 как суммы одноточечных множеств:

$$\text{"старый"} = \int_{50}^{100}\left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} / u, \quad \text{"очень старый"} = \int_{50}^{100}\left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2} / u.$$

Построим графики функций принадлежности нечетких множеств *старый* и "*очень старый*"

Определение 4.1. Пусть X – название лингвистической переменной. Слово или группу слов, являющихся значениями переменной X, называют ***термом.*** Каждый терм является ***именем нечеткого подмножества*** универсального множества U.

Терм, состоящий из одного слова или нескольких слов, объединенных друг с другом в определенном порядке, называют ***атомарным термом***. Терм, состоящий из одного или более атомарных термов, называют ***составным термом***.

Результат приписывания друг к другу цепочек-компонент составного терма называют ***конкатенацией.***

Конкатенация некоторых компонент составного терма называется ***подтермом***.

Строго говоря, элементы терм-множества являются ***именами*** нечетких подмножеств $X_1, X_2, \ldots$ множества U. Но во многих случаях имена множеств и сами множества отождествляются. При таком отождествлении терм-множество T можно представить в виде объединения всех значений лингвистической переменной X:

$$T = X_1 \cup X_2 \cup \ldots = \sum_i X_i.$$

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих смысл введенных понятий и символику, применяемую для их записи.

Пусть лингвистическая переменная X="*возраст*" имеет базовое множество $U=[0,100]$. Атомарными термами являются в частности термы, о которых уже упоминалось "*молодой*" и "*старый*". Атомарные термы входят в составные термы: "*более или менее молодой*" (подтермы – "*более или менее*" и "*молодой*"), "*очень старый*" (подтермы – "*очень*" и "*старый*").

Терм-множество переменной "*возраст*":

T("*возраст*")="*старый*"$\cup$"*очень старый*"$\cup$"*не старый*"$\cup$"*более или менее молодой*"$\cup$"*вполне молодой*"$\cup$"*не очень молодой и не очень старый*"$\cup$...

Каждый терм в T("*возраст*") является названием нечеткого подмножества универсального множества $U=[0,100]$.

Теперь рассмотрим лингвистическую переменную X="*количество*" с базовым множеством $U=\{1,2,3,...,10\}$ и терм-множеством

T("*количество*")="*немного*"$\cup$"*несколько*"$\cup$"*много*".

Здесь равенство "*количество*"="*немного*" означает, что лингвистической переменной "*количество*" присвоено значение "*немного*" из терм-множества этой переменной.

Элементы терм-множества являются именами нечетких подмножеств множества U, определенных, например, следующим образом:

"*немного*" $=0.4/1+0.8/2+1/3+0.4/4$;

"*несколько*"$=0.5/3+0.8/4+1/5+1/6+0.8/7+0.5/8$;

"*много*"$=0.4/6+0.6/7+0.8/8+0.9/9+1/10$.

Лингвистические переменные могут соединяться в пары, образуя ***составную лингвистическую переменную***. Например, составной лингвистической переменной является переменная (X,Y)= "*равны*". Пусть базовое множество этой переменной – декартов квадрат множества $X=\{1,2,3,4\}$, а терм-множество состоит из двух термов:

T="*приближенно равны*"$\cup$"*более или менее равны*".

В данном примере значениями лингвистической переменной являются названия нечетких бинарных отношений сходства. Матрицами инциденций этих отношений могут служить, например, такие матрицы:

$$J_{\text{приближенно равны}}=\begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\text{более или менее равны}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Синтаксическое и семантическое правила

В примерах, рассмотренных в разд. 4.1, терм-множества лингвистических переменных X были заданы списком, т. е. все элементы множества $T(X)$ были перечислены. Но такие случаи, вообще говоря, мало интересны. С практической точки зрения важно иметь не список термов, а *правило*, которое позволяло бы из определенного набора слов получать все возможные значения лингвистической переменной. Такое правило называют ***синтаксическим правилом***. Синтаксическое правило можно рассматривать как алгоритмическую процедуру для порождения элементов множества $T(X)$. Все термы, полученные с помощью синтаксического правила, составляют терм-множество.

Пусть задана лингвистическая переменная X="*возраст*" и элементами терм-множества $T(X)$ являются термы "*старый*", "*очень старый*", "*очень, очень старый*", "*очень, очень, очень старый*" и т.п. Синтаксическое правило образования элементов множества $T(X)$ может быть сформулировано следующим образом.

Обозначим конкатенацию символьных цепочек x и y символом xy. В данном примере x= "*очень*", y= "*старый*", xy= "*очень старый*". Если A и B – множества цепочек:

$$A = x_1 + x_2 + \ldots,$$
$$B = y_1 + y_2 + \ldots,$$

то конкатенация $AB = (x_1 + x_2 + \ldots)(y_1 + y_2 + \ldots) = \sum_{i,j} x_i y_j$. Например, если A="*очень*", B= "*старый*"+"*очень старый*", то AB = "*очень*"("*старый*"+ "*очень старый*")= ="*очень старый*"+"*очень, очень старый*".

Используя эти обозначения, терм-множество T("*возраст*") можно рассматривать как решение уравнения

$$T = \text{"старый"} + \text{"очень } T\text{"}. \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) имеет следующее смысловое содержание: множество T состоит из терма "*старый*" и термов, представляющих собой конкатенации терма "*очень*" и некоторого терма из T.

Решим уравнение (4.1) методом итераций, используя рекуррентное соотношение:

$$T^{i+1} = \text{"старый"} + \text{"очень } T^{i}\text{"},\ i = 0,1,2,\ldots .$$

Взяв $T^0 = \varnothing$, получаем все элементы терм-множества T:

$$T^0 = \varnothing,$$

$$T^1 = \text{"старый"} + \text{"очень}\varnothing\text{"} = \text{"старый"},$$

$$T^2 = \text{"старый"} + \text{"очень}T^1\text{"} = \text{"старый"} + \text{"очень старый"},$$

$$T^3 = \text{"старый"} + \text{"очень}T^2\text{"} = \text{"старый"} + \text{"очень старый"} + \text{"очень, очень старый"},$$

....

Синтаксическое правило в данном примере выражается уравнением (4.1) и его решением. В дальнейшем синтаксическое правило будем обозначать символом G, а терм-множество, образованное с помощью этого правила, – $T(G)$.

Каждый терм из $T(G)$ является именем нечеткого подмножества множества U. В связи с этим, помимо синтаксического правила G, необходимо правило, позволяющее для термов X, образуемых с помощью G, получать функции принадлежности этих нечетких подмножеств μ_X. Такое правило называют ***семантическим правилом***. Семантическое правило, как и синтаксическое, можно рассматривать как алгоритмическую процедуру для порождения функций принадлежности нечетких подмножеств X множества U. Семантическое правило будем обозначать символом M.

Рассмотрим термы X_1="*старый*" и X_2= "*очень старый*". X_1 является ***первичным термом***, элементом терм-множества. Одновременно X_1 является нечетким подмножеством универсального множества $U = [0,100]$ с функцией принадлежности $\mu_{X_1}(u) = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$ (см. рис. 4.1). Терм X_2 образован из первичного терма с помощью ***модификатора*** "*очень*". Модификатор меняет функцию принадлежности μ_{X_1} нечеткого подмножества X_1 на функцию принадлежности μ_{X_2} нечеткого подмножества X_2 путем применения операции концентрирования (см. формулу (1.7)):

$$X_2 = CON\ X_1 .$$

Следовательно,

$$\mu_{X_2}(u) = \mu_{X_1}^2(u) = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2} .$$

Если терм X_{n+1} получен из терма X_n применением синтаксического правила (4.1), а действие модификатора "*очень*" сводится к операции концентрирования для любого терма X_n из $T(G)$, то соответствующее семантическое правило имеет вид

$$X_{n+1} = CON\ X_n \text{ или } \mu_{X_{n+1}}(u) = \mu^2_{X_n}(u).$$

Применяя метод итераций, получаем последовательность:

$$\mu_{X_1} = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1},$$

$$\mu_{X_2} = \mu_{CONX_1} = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2},$$

$$\mu_{X_3} = \mu_{CONX_2} = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-4},$$

....

$$\mu_{X_{n+1}} = \mu_{CONX_n} = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2n},$$

....

Дадим теперь строгое определение лингвистической переменной.

Определение 4.2. ***Лингвистической переменной*** называют набор

$$(X, T(X), U, G, M),$$

где X – название переменной; $T(X)$ - терм-множество, т. е. множество имен значений переменной X, причем каждому из этих имен соответствует нечеткое подмножество X, заданное на универсальном множестве U с базовой переменной u; G – синтаксическое правило, порождающее имена X значений переменной X; M – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждому элементу терм-множества нечеткое подмножество X универсального множества U.

Синтаксическое и семантическое правила, связанные с лингвистической переменной, можно рассматривать как алгоритмические процедуры для порождения элементов множества $T(X)$ и вычисления значений функций принадлежности нечетких подмножеств множества U с именами из $T(X)$.

В рассмотренных примерах термы, являющиеся значениями лингвистической переменной и одновременно именами нечетких множеств, были получены применением модификатора "*очень*" к уже имеющимся термам. В качестве модификаторов обычно используют слова "*более или менее*", "*вполне*", "*сущесивенно*" и т.п. Конкатенация модификатора h и терма X меняет функцию принадлежности μ_X. Семантическое правило, по которому происходит это изменение, определяется смыслом терма и модификатора, а также целью решения задачи. Смысл этот, а значит, и само семантическое правило задает специалист, решающий задачу и определяющий цели ее решения. Семантическое правило может представлять собой алгоритмическую процедуру для вычисления значений функций принадлежности, конкретную операцию над нечетким множеством, действие оператора нечеткости, элементы матрицы которого заданы экспертами, и т.п. Так, действие модификатора "*очень*" рассматривалось выше как операция концентрирования.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий зависимость результата действия модификатора от выбора семантического правила. Пусть X= ="*экзамен сдан*", первичным термом множества $T(X)$ является слово X="*успешно*". Задано нечеткое подмножество X универсального множества

$$U=\{m(\textit{математика}),\ f(\textit{физика}),\ i(\textit{информатика}),\ e(\textit{экономика})\}:$$

$$X=0.5/m+0.3/f+0.9/i+1/e$$

и модификатор "*более или менее*".

Рассмотрим два способа задания семантического правила:

1) изменение нечеткого множества X под действием оператора нечеткости (см. формулу (1.10)):

$$K=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0 & 0\\ 0.8 & 1 & 0.3 & 0\\ 0 & 0.7 & 0.9 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0.7\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}m\\ f\\ i\\ e\end{array};$$

2) применение операции растяжения DIL (см. формулу (1.8)) к множеству X.

Нечеткое множество KX = "*более или менее успешно*" находим по правилу (1.10):

$$K=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0 & 0\\ 0.8 & 1 & 0.3 & 0\\ 0 & 0.7 & 0.9 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0.7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5\\ 0.3\\ 0.9\\ 1\end{pmatrix}=\max(0.5,0.15)/m+\max(0.4,0.3,0.27)/f+$$

$$+\max(0.21,0.81,1)/i+\max(0.9,0.7)/e=0.5/m+0.4/f+1/i+0.9/e.$$

Применение операции DIL к нечёткому подмножеству X дает следующий результат:

$$DIL(X)=X^{0.5}=\sqrt{0.5}/m+\sqrt{0.3}/f+\sqrt{0.9}/i+\sqrt{1}/e\approx 0.71/m+0.55/f+0.95/i+1/e.$$

Результаты применения операции растяжения и оператора нечеткости значительно различаются. Какой из них предпочтительнее, сказать нельзя, так как цель решения задачи в данном случае является чисто дидактической.

5. НЕЧЕТКИЕ БУЛЕВЫ ПЕРЕМЕННЫЕ

5.1. Булева алгебра

Алгебра ***высказываний*** и ***предикатов*** является одним из разделов бинарной (обычной) математической логики. Высказывание – это утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно, предикат – утверждение, содержащее одну или несколько переменных. При одних значениях переменных предикат становится истинным высказыванием, при других – ложным. Высказывание и предикат можно понимать как переменную p, принимающую два возможных значения "*истина*"$=1$ или "*ложь*"$=0$.

Определение 5.1. Переменная, множеством значений которой является множество $B=\{0,1\}$, называется ***булевой переменной.***

Если p – высказывание или предикат, то p – булева переменная, т.е. переменная, принимающая лишь *два* возможных значения: 0 или 1. Вот почему ту часть математической логики, которая занимается высказываниями и предикатами, называют бинарной (двоичной) логикой.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ – булевы переменные. Каждая из них может принимать значения 0 или 1. Последовательность $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ есть n-мерный двоичный вектор. Существует 2^n различных n-мерных векторов, компонентами которых являются булевы переменные. Функция, ставящая каждому n-мерному вектору определенное значение из множества B, называется булевой функцией. Булеву функцию можно задать в виде таблицы, содержащей 2^n строк и $n+1$ столбец. В первых n столбцах таблицы записаны все возможные двоичные n-мерные векторы, а в последнем столбце – соответствующее значение функции.

Пусть булева функция от трех переменных задана таблицей:

p_1	p_2	p_3	$y=f(p_1,p_2,p_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Обратим внимание на то, что трехмерные двоичные векторы в первых трех столбцах таблицы можно рассматривать как номера этих векторов (от номера 0 до номера 7), записанные в двоичной системе счисления.

На множестве булевых переменных определены логические операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции и ряд других (табл.5.1).

Обратим внимание на то, что таблицы истинности операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции совпадают с таблицами характеристических функций операций дополнения, пересечения и объединения множеств (см. табл. 1.5).

Такое совпадение таблиц истинности означает, что множество всех подмножеств универсального множества U с операциями дополнения, пересечения и объединения и множество высказываний с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции являются различными интерпретациями одной и той же математической модели. Эта модель называется ***булевой алгеброй***. Все свойства операций над множествами (см. табл. 1.6) присущи также и соответствующим операциям над высказываниями. Например, свойство порядка для конъюнкции и дизъюнкции будет иметь вид $p \wedge q \leq p$ и $p \wedge q \leq q$, $p \vee q \geq p$ и $p \vee q \geq q$.

Высказывания или их отрицания, соединенные знаками логических операций, образуют ***формулу логики высказываний*** или ***формулу булевой алгебры***. Две формулы называются *эквивалентными*, если при любых наборах значений входящих в них переменных они принимают одинаковые значения. Две эквивалентные формулы соединяют знаком равенства.

Докажем, что формулы $\overline{p \vee q}$ и $\overline{p} \wedge \overline{q}$ эквивалентны. Составим таблицу истинности этих формул:

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Выделенные столбцы, в которых записаны значения истинности формул $\overline{p \vee q}$ и $\overline{p} \wedge \overline{q}$, совпадают. Это означает, что при любых значениях высказываний p и q формулы $\overline{p \vee q}$ и $\overline{p} \wedge \overline{q}$ принимают одинаковые значения, что и означает их эквивалентность.

В курсе дискретной математики было доказано, что любую булеву функцию можно представить в виде формулы, содержащей операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Напомним на примере, как это делается.

Таблица 5.1

Операции над булевыми переменными

<table>
<tr><th>Название операции</th><th>Таблицы истинности</th><th>Описание операций</th></tr>
<tr><td>Отрицание</td><td><table><tr><th>p</th><th>$\overline{p}$</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>Унарная операция, строится с помощью слов "не", "неверно, что...". Отрицание высказывания обозначается символом $\overline{p}$, который читается: "не p"</td></tr>
<tr><td>Конъюнкция</td><td><table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \wedge q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью союза "и". Конъюнкция высказываний обозначается символом $p \wedge q$, который читается: "p и q"</td></tr>
<tr><td>Дизъюнкция</td><td><table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \vee q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью союза "или". Дизъюнкция высказываний обозначается символом $p \vee q$, который читается: "p или q"</td></tr>
<tr><td>Импликация</td><td><table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \Rightarrow q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью слов "если... то". Импликация высказываний обозначается символом $p \Rightarrow q$, который читается: "если p, то q".</td></tr>
<tr><td>Эквиваленция</td><td><table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \Leftrightarrow q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью слов "тогда и только тогда", "если и только если". Эквиваленция высказываний обозначается символом $p \Leftrightarrow q$, который читается "q тогда и только тогда, когда p"</td></tr>
<tr><td>Кольцевая сумма</td><td><table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \oplus q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью слов "сумма", "плюс". Циклическая сумма высказываний обозначается символом $p \oplus q$, который читается: "сумма p и q"</td></tr>
</table>

Примечание. Символами p и q в табл. 5.1 обозначены высказывания.

Представим импликацию $f(p,q) = p \Rightarrow q$ формулой, содержащей указанные выше операции.

p	q	$p \Rightarrow q$	Элементарные конъюнкции
0	0	1	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
0	1	1	$\bar{p} \wedge q$
1	0	0	
1	1	1	$p \wedge q$

$$\Longrightarrow \left((p \Rightarrow q) = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee q) \vee (p \wedge q)\right)$$

Формула $\left((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee q) \vee (p \wedge q)\right)$ называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)*** импликации. Для сокращения записей знаки конъюнкции опускают или заменяют знаками умножения. Опускают также скобки, договорившись, что в формуле без скобок сначала выполняются все конъюнкции, а затем над ними производятся дизъюнкции. При таких договоренностях СДНФ импликации выглядит так: $p \Rightarrow q = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q$. Пользуясь свойствами операций булевой алгебры, можно упростить СДНФ импликации:

$$p \Rightarrow q = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q == \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q = \bar{p} \cdot (\bar{q} \vee q) \vee (\bar{p} \vee p) \cdot q =$$
$$= \bar{p} \cdot 1 \vee 1 \cdot q = \bar{p} \vee q .$$

При выполнении преобразований были использованы следующие свойства операций булевой алгебры:

1. Идемпотентность дизъюнкции $x \vee x = x$.

2. Ассоциативность дизъюнкции $x \vee y \vee z = x \vee (y \vee z)$ и дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции: $x \cdot y \vee x \cdot z = x \cdot (y \vee z)$.

3. Закон исключения третьего $x \vee \bar{x} = 1$

4. Свойство единицы для конъюнкции $x \cdot 1 = x$.

5.2. Нечеткие булевы переменные и логические операции над ними

Определение 5.2. ***Нечеткой булевой переменной*** называют переменную p, которая является именем нечеткого подмножества множества $U = [0,1]$.

В дальнейшем для сокращения записей будем обозначать одним и тем же символом саму нечеткую переменную и функцию принадлежности нечеткого множества, именем которого она является.

Над нечеткими булевыми переменными, так же как и над обычными булевыми переменными, осуществимы операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Пусть p и q – две нечеткие булевы переменные. Запишем правила выполнения логических операций над ними:

1. *Отрицание нечеткой булевой переменной*: $\bar{p} = 1 - p$.

2. *Конъюнкция нечетких булевых переменных*: $p \wedge q = p \cdot q = \min(p,q)$.

3. *Дизъюнкция нечетких булевых переменных*: $p \vee q = \max(p,q)$.

Напомним, что конъюнкция и дизъюнкция нечетких переменных, выполненные по правилам 2 и 3, в общем случае называются соответственно логическим умножением и операцией максимум (см. табл.1.7).

Множество булевых переменных с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции и множество всех нечетких подмножеств какого-либо универсального множества U с операциями дополнения, пересечения и объединения являются интерпретациями одной и той же математической модели. Операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции над нечеткими булевыми переменными обладают всеми свойствами, указанными в табл. 1.6. В алгебре нечетких высказываний так же, как и в алгебре нечетких множеств, нарушаются два логических закона: закон исключения третьего ($p \vee \bar{p} = 1$) и закон противоречия ($p \wedge \bar{p} = 0$).

Определение 5.3. Пусть $p_1, p_2, ..., p_n$ – нечеткие булевы переменные. Функцию $f(p_1, p_2, ..., p_n)$ называют ***функцией нечетких булевых переменных***, если она принимает значения на отрезке $[0,1]$.

Аналогично формулам булевой алгебры, можно получать формулы нечеткой логики, каждая из которых представляет определенную функцию нечетких переменных. Чтобы записать значения функции, представленной формулой, содержащей лишь знаки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, можно использовать таблицы, аналогичные таблицам истинности в двоичной логике.

Рассмотрим пример на составление таблицы функции нечетких переменных. Пусть $f(p,q) = (p \wedge \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{q})$.

Составим все возможные соотношения между переменными p, $\bar{p}$, q и $\bar{q}$, учитывая, что $\bar{p} = 1 - p$, $\bar{q} = 1 - q$.

Задача сводится к тому, чтобы составить последовательность четырех символов, между которыми поставлены знаки неравенства "$\leq$". Существует четыре способа выбора первого элемента последовательности: самым маленьким числом среди чисел p, $\bar{p}$, q и $\bar{q}$ может быть любое из них. Пусть, например, самым маленьким числом является p. Тогда самым большим числом будет число $\bar{p} = 1 - p$. Следовательно, выбор первого элемента последовательности однозначно определяет выбор ее последнего элемента. После выбора первого числа остается две возможности выбрать второй элемент последовательности.

Выбор второго элемента последовательности однозначно определяет выбор третьего числа. Например, если на второе место поставлено число q, то на третье место можно поставить только число $\bar{q} = 1 - q$. Таким образом, существует восемь способов составления последовательности переменных p, $\bar{p}$, q и $\bar{q}$, соединенных знаками неравенства:

$$p \le q \le \bar{q} \le \bar{p},\ p \le \bar{q} \le q \le \bar{p};$$
$$\bar{p} \le q \le \bar{q} \le p,\ \bar{p} \le \bar{q} \le q \le p;$$
$$q \le p \le \bar{p} \le \bar{q},\ q \le \bar{p} \le p \le \bar{q};$$
$$\bar{q} \le p \le \bar{p} \le q,\ \bar{q} \le \bar{p} \le p \le q.$$

Таблица функции $f(p,q) = (p \wedge \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{q})$ имеет вид

Вид неравенства	$p \wedge \bar{p} = \min(p, \bar{p})$	$\bar{p} \wedge q \wedge \bar{q} = \min(\bar{p}, q, \bar{q})$	$f(p,q) = (p \wedge \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{q}) =$ $= \max(\min(p, \bar{p}), \min(\bar{p}, q, \bar{q}))$
$p \le q \le \bar{q} \le \bar{p}$	p	q	q
$p \le \bar{q} \le q \le \bar{p}$	p	$\bar{q}$	$\bar{q}$
$\bar{p} \le q \le \bar{q} \le p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	$\bar{p}$
$\bar{p} \le \bar{q} \le q \le p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	$\bar{p}$
$q \le p \le \bar{p} \le \bar{q}$	p	q	p
$q \le \bar{p} \le p \le \bar{q}$	$\bar{p}$	q	$\bar{p}$
$\bar{q} \le p \le \bar{p} \le q$	p	$\bar{q}$	p
$\bar{q} \le \bar{p} \le p \le q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}$

Определение 5.4. Функции f_1 и f_2 называют ***равносильными*** или ***тождественными***, если они имеют одну и ту же таблицу значений, включающую все возможные соотношения между переменными.

Существует четыре различные функции от одной нечеткой переменной p:

Вид неравенства	Обозначения функций			
	f_1	f_2	f_3	f_4
$p \le \bar{p}$	p	p	$\bar{p}$	$\bar{p}$
$\bar{p} \le p$	p	$\bar{p}$	p	$\bar{p}$

Но функций от двух переменных существует уже 4^8=65536, функций от n переменных – $(2n)^{(n!2^n)}$ [7]. Только незначительная часть всех этих функций может быть представлена с помощью операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции над нечеткими переменными.

Определение 5.5. Функцию f от нечетких булевых переменных называют ***аналитической функцией***, если она может быть представлена формулой, содержащей операции конъюнкции и дизъюнкции, выполняемые над аргументами функции и их отрицаниями.

Составим таблицу простейших аналитических функций $p \wedge q$, $\bar{p} \wedge q$, $p \wedge \bar{q}$, $\bar{p} \wedge \bar{q}$, $p \vee q$, $\bar{p} \vee q$, $p \vee \bar{q}$, $\bar{p} \vee \bar{q}$ от двух переменных (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Таблица простейших функций от двух нечетких булевых переменных

Вид неравенства	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge q$	$p \wedge \bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \vee q$	$\bar{p} \vee q$	$p \vee \bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
$p \le q \le \bar{q} \le \bar{p}$	p	q	p	$\bar{q}$	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}$
$p \le \bar{q} \le q \le \bar{p}$	p	q	p	$\bar{q}$	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}$
$\bar{p} \le q \le \bar{q} \le p$	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	p	q	p	$\bar{q}$
$\bar{p} \le \bar{q} \le q \le p$	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	p	q	p	$\bar{q}$
$q \le p \le \bar{p} \le \bar{q}$	q	q	p	$\bar{p}$	p	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$
$q \le \bar{p} \le p \le \bar{q}$	q	q	p	$\bar{p}$	p	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$
$\bar{q} \le p \le \bar{p} \le q$	p	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$	q	q	p	$\bar{p}$
$\bar{q} \le \bar{p} \le p \le q$	p	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$	q	q	p	$\bar{p}$

Формулы, представляющие аналитические функции, можно упрощать, используя свойства операций над нечеткими переменными, однако при этом необходимо помнить о нарушении в нечеткой логике закона исключения третьего и закона противоречия:

$$p \vee \bar{p} \ne 1 \text{ и } p \wedge \bar{p} \ne 0, \text{если } p \ne 1, \quad p \ne 0. \tag{5.1}$$

Например, упрощение СДНФ импликации во множестве обычных булевых переменных приводит к простой формуле (см. разд. 5.1):

$$p \Rightarrow q = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q = \bar{p} \vee q .$$

Но во множестве функций нечетких переменных $f(p,q) = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q$ не поддается упрощению в силу неравенств (5.1):

$$f(p,q) = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q = \bar{p} \cdot (\bar{q} \vee q) \vee q \cdot (\bar{p} \vee p) .$$

Поскольку $q \vee \bar{q} \neq 1$ и $p \vee \bar{p} \neq 1$, дальнейшие преобразования невозможны.

Составим таблицу СДНФ импликации во множестве нечетких переменных:

Вид неравенства	$\bar{p}\cdot\bar{q} = \min(\bar{p},\bar{q})$	$\bar{p}\cdot q = \min(\bar{p},q)$	$p\cdot q = \min(p,q)$	$\bar{p}\cdot\bar{q} \vee \bar{p}\cdot q \vee p\cdot q = \max(\min(\bar{p},\bar{q}),\min(\bar{p},q),\min(p,q))$
$p \le q \le \bar{q} \le \bar{p}$	$\bar{q}$	q	p	$\bar{q}$
$p \le \bar{q} \le q \le \bar{p}$	$\bar{q}$	q	p	q
$\bar{p} \le q \le \bar{q} \le p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	q	q
$\bar{p} \le \bar{q} \le q \le p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	q	q
$q \le p \le \bar{p} \le \bar{q}$	$\bar{p}$	q	q	$\bar{p}$
$q \le \bar{p} \le p \le \bar{q}$	$\bar{p}$	q	q	$\bar{p}$
$\bar{q} \le p \le \bar{p} \le q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	p	$\bar{p}$
$\bar{q} \le \bar{p} \le p \le q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	p	p

5.3. Анализ функции нечетких булевых переменных

Выясним, при каких условиях аналитическая функция $f(p,q)$ от двух нечетких булевых переменных попадает в заданный промежуток $[\alpha,\beta)$ отрезка $[0,1]$.

Пусть $p \in [a_1,a_2] \subseteq [0,1]$ и $q \in [b_1,b_2] \subseteq [0,1]$.

Возможны шесть вариантов взаимного расположения точек a_1, b_1, a_2, b_2 на отрезке $[0,1]$ и каждому из них соответствует определенное множество значений аналитических функций $f(p,q) = p \wedge q$ и $f(p,q) = p \vee q$ ($p \in [a_1,a_2]$, $q \in [b_1,b_2]$ (рис. 5.1).

Можно видеть, что при любых возможных соотношениях между a_1, b_1, a_2, b_2 справедливы следующие утверждения:

$$p \wedge q \in [\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)], \qquad (5.2)$$

$$p \vee q \in [\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]. \qquad (5.3)$$

Из утверждений (5.2) и (5.3) получаем аналогичные включения для конъюнкций и дизъюнкций, содержащих отрицания p и q:

$$p \wedge \bar{q} \in [\min(a_1,1-b_2),\min(a_2,1-b_1)], \qquad (5.4)$$

$$\bar{p} \wedge q \in [\min(1-a_2,b_1),\min(1-a_1,b_2)], \qquad (5.5)$$

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \in [\min(1-a_2,1-b_2),\min(1-a_1,1-b_1)], \qquad (5.6)$$

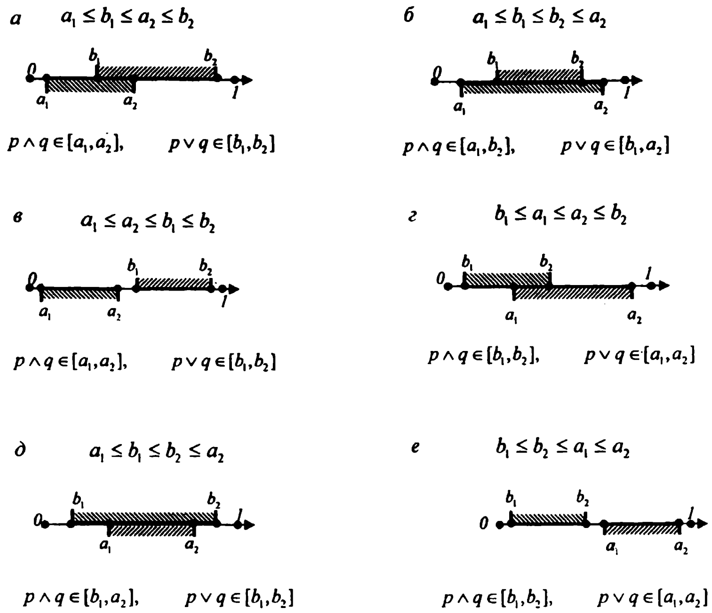


Рис. 5.1. Возможные варианты взаимного расположения точек a_1, b_1, a_2, b_2

$$p \vee \bar{q} \in [\max(a_1, 1 - b_2), \max(a_2, 1 - b_1)], \tag{5.7}$$

$$\bar{p} \wedge q \in [\max(1 - a_2, b_1), \max(1 - a_1, b_2)], \tag{5.8}$$

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \in [\max(1 - a_2, 1 - b_2), \max(1 - a_1, 1 - b_1)]. \tag{5.9}$$

Покажем, как, например, получается соотношение (5.4):

$$q \in [b_1, b_2] \Rightarrow \bar{q} \in [1 - b_2, 1 - b_1] \Rightarrow p \wedge \bar{q} \in [\min(a_1, 1 - b_2), \min(a_2, 1 - b_1)].$$

Соотношения (5.5) – (5.9) выводятся аналогично.

Получим условия, при которых функция $f(p,q) = p \wedge q$ попадет в промежуток $[\alpha, \beta)$:

$$p \wedge q \in [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)) \Rightarrow p \wedge q \in [\alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \min(a_1, b_1) \ge \alpha \\ \min(a_2, b_2) < \beta \end{cases}.$$

Можно видеть, что $\min(a_1,b_1)\ge\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\ge\alpha \\ b_1\ge\alpha \end{cases}$, т.е. *оба числа* a_1 и b_1 должны быть больше α. В самом деле, если хотя бы одно из чисел a_1 или b_1 удовлетворяет противоположному соотношению, например, $a_1<\alpha<b_1$, то $\min(a_1,b_1)=a_1<\alpha$. Поэтому неравенство $\min(a_1,b_1)\ge\alpha$ эквивалентно ***системе неравенств*** $\begin{cases} a_1\ge\alpha \\ b_1\ge\alpha \end{cases}$.

В то же время неравенство $\min(a_2,b_2)<\beta$ будет выполнено, если *хотя бы одно из чисел* a_1 или b_1 оказалось меньше β. Действительно, если, например, $a_2>\beta>b_2$, то $\min(a_2,b_2)=b_2<\beta$, т.е. неравенство $\min(a_2,b_2)<\beta$ эквивалентно ***совокупности неравенств*** $\left[\begin{array}{l} a_2<\beta \\ b_2<\beta \end{array}\right.$.

Таким образом, система неравенств $\begin{cases} \min(a_1,b_1)\ge\alpha \\ \min(a_2,b_2)<\beta \end{cases}$ эквивалентна системе, состоящей из системы $\begin{cases} a_1\ge\alpha \\ b_1\ge\alpha \end{cases}$ и совокупности $\left[\begin{array}{l} a_2<\beta \\ b_2<\beta \end{array}\right.$ неравенств.

В итоге получаем

$$p\wedge q\in[\alpha,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_1\ge\alpha \\ b_1\ge\alpha \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} a_2<\beta \\ b_2<\beta \end{array}\right. \end{cases},$$

или, учитывая, что $p\in[a_1,a_2]$ и $q\in[b_1,b_2]$

$$p\wedge q\in[\alpha,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p\ge\alpha \\ q\ge\alpha \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} p<\beta \\ q<\beta \end{array}\right. \end{cases}. \qquad (5.10)$$

Рассуждая аналогичным образом и используя соотношения (5.2) – (5.8), получаем условия попадания простейших аналитических функций от двух нечетких булевых переменных в заданный промежуток $[\alpha,\beta)$ (табл. 5.3).

Подчеркнем, что системы и совокупности неравенств определяют объединения и пересечения числовых множеств. Их можно рассматривать как множества истинности соответствующих предикатов. Например, система 6 (см. табл. 5.3) есть множество истинности двуместного предиката $H(p,q):\ \bar{p}\vee q\in[\alpha,\beta)$, который является результатом выполнения логических операций над одноместными предикатами: $H(p,q)=(h_1(p)\vee h_2(q))\wedge h_3(p)\wedge h_4(q)$, где $h_1(p):(p \le 1-\alpha)$, $h_2(q):(q \ge \alpha)$, $h_3(p):(p > 1-\beta)$, $h_4(q):(q < \beta)$ – одноместные предикаты.

Таблица 5.3

Условия выполнения неравенства $\alpha \le f(p,q) < \beta$

№ п/п	$f(p,q)$	Условия, при которых $\alpha \le f(p,q) < \beta$	№ п/п	$f(p,q)$	Условия, при которых $\alpha \le f(p,q) < \beta$
1	$p \wedge q$	$\begin{cases} \begin{cases} p \ge \alpha \\ q \ge \alpha \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} p < \beta \\ q < \beta \end{array} \right. \end{cases}$	5	$p \vee q$	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} p \ge \alpha \\ q \ge \alpha \end{array} \right. \\ \begin{cases} p < \beta \\ q < \beta \end{cases} \end{cases}$
2	$\bar{p} \wedge q$	$\begin{cases} \begin{cases} p \le 1-\alpha \\ q \ge \alpha \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} p > 1-\beta \\ q < \beta \end{array} \right. \end{cases}$	6	$\bar{p} \vee q$	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} p \le 1-\alpha \\ q \ge \alpha \end{array} \right. \\ \begin{cases} p > 1-\beta \\ q < \beta \end{cases} \end{cases}$
3	$p \wedge \bar{q}$	$\begin{cases} \begin{cases} p \ge \alpha \\ q \le 1-\alpha \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} p < \beta \\ q > 1-\beta \end{array} \right. \end{cases}$	7	$p \vee \bar{q}$	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} p \ge \alpha \\ q \le 1-\alpha \end{array} \right. \\ \begin{cases} p < \beta \\ q > 1-\beta \end{cases} \end{cases}$
4	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\begin{cases} \begin{cases} p \le 1-\alpha \\ q \le 1-\alpha \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} p > 1-\beta \\ q > 1-\beta \end{array} \right. \end{cases}$	8	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} p \le 1-\alpha \\ q \le 1-\alpha \end{array} \right. \\ \begin{cases} p > 1-\beta \\ q > 1-\beta \end{cases} \end{cases}$

Определим, при каких условиях СДНФ кольцевой суммы $f(x_1,x_2) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2$ (см. табл. 5.1) попадает в промежуток $[0.1, 0.3)$.

Перепишем табл.5.3, сделав ее более удобной для решения такого рода задач (табл.5.4).

Таблица 5.4

Условия выполнения неравенства $\alpha \le f(p,q) < \beta$

№ п/п	$f(p,q)$	Условия, обеспечивающие нижнюю границу промежутка $\alpha \le f(p,q)$	Условия, обеспечивающие верхнюю границу промежутка $f(p,q) < \beta$
1	2	3	4
1	$p \wedge q$	$\begin{cases} p \ge \alpha \\ q \ge \alpha \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p < \beta \\ q < \beta \end{array} \right.$

Окончание табл. 5.4

1	2	3	4
2	$\bar{p}\wedge q$	$\begin{cases} p\le 1-\alpha \\ q\ge\alpha \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p>1-\beta \\ q<\beta \end{array}\right.$
3	$p\wedge\bar{q}$	$\begin{cases} p\ge\alpha \\ q\le 1-\alpha \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p<\beta \\ q>\phi \end{array}\right.$
4	$\bar{p}\wedge\bar{q}$	$\begin{cases} p\le 1-\alpha \\ q\le 1-\alpha \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p>1-\beta \\ q>1-\beta \end{array}\right.$
5	$p\vee q$	$\left[\begin{array}{l} p\ge\alpha \\ q\ge\alpha \end{array}\right.$	$\begin{cases} p<\beta \\ q<\beta \end{cases}$
6	$\bar{p}\vee q$	$\left[\begin{array}{l} p\le 1-\alpha \\ q\ge\alpha \end{array}\right.$	$\begin{cases} p>1-\beta \\ q<\beta \end{cases}$
7	$p\vee\bar{q}$	$\left[\begin{array}{l} p\ge\alpha \\ q\le 1-\alpha \end{array}\right.$	$\begin{cases} p<\beta \\ q>1-\beta \end{cases}$
8	$\bar{p}\vee\bar{q}$	$\left[\begin{array}{l} p\le 1-\alpha \\ q\le 1-\alpha \end{array}\right.$	$\begin{cases} p>1-\beta \\ q>1-\beta \end{cases}$

Обозначим $\bar{x}_1\cdot x_2=p$, $x_1\cdot\bar{x}_2=q$.

Согласно табл.5.4, получаем

$$H(p,q)\wedge G(p,q):\ p\vee q\in[0.1,0.3)\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l} p\ge 0.1 \\ q\ge 0.1 \end{array}\right. \\ \begin{cases} p<0.3 \\ q<0.3 \end{cases}\end{cases},$$

где $H(p,q):\left[\begin{array}{l} p\ge 0.1 \\ q\ge 0.1 \end{array}\right.$ и $G(p,q):\begin{cases} p<0.3 \\ q<0.3 \end{cases}$ – двуместные предикаты бинарной логики. Множество истинности предиката $H(p,q)$ обеспечивает нижнюю границу промежутка $[0.1,0.3)$, а предиката $G(p,q)$ – его верхнюю границу. Предикат $H(p,q)$ есть дизъюнкция одноместных предикатов $h_1(p):(p\ge 0.1)$ и $h_2(q):(q\ge 0.1)$, $G(p,q)$ – конъюнкция предикатов $g_1(p):(p<0.3)$ и $g_2(q):(q<0.3)$.

Поскольку $p=\bar{x}_1\cdot x_2$ и $q=x_1\cdot\bar{x}_2$, предикаты $h_1(p)$, $h_2(q)$, $g_1(p)$ и $g_2(q)$ являются предикатами от двух переменных x_1 и x_2, которые входят в предикаты либо сами, либо своими отрицаниями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$:

$$h_1(p)=h_1(x_1,x_2):(0.1\le\bar{x}_1\cdot x_2),$$

$$h_2(q)=h_2(x_1,x_2):(0.1\le x_1\cdot\bar{x}_2),$$
$$g_1(p)=g_1(x_1,x_2):(\bar{x}_1\cdot x_2<0.3),$$
$$g_2(q)=g_2(x_1,x_2):(x_1\cdot\bar{x}_2<0.3).$$

В соответствии с табл.5.3 получаем множества истинности предикатов $h_1(x_1,x_2)$, $h_2(x_1,x_2)$, $g_1(x_1,x_2)$, $g_2(x_1,x_2)$:

$$(0.1\le\bar{x}_1\cdot x_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1\le 0.9\\ x_2\ge 0.1\end{cases},$$
$$(0.1\le x_1\cdot\bar{x}_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1\ge 0.1\\ x_2\le 0.9\end{cases},$$
$$(\bar{x}_1\cdot x_2<0.3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1>0.7\\ x_2<0.3\end{array}\right.,$$
$$(x_1\cdot\bar{x}_2<0.3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<0.3\\ x_2>0.7\end{array}\right..$$

Таким образом, функция $f(x_1,x_2)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_2$, попадает в промежуток $[0.1,0.3)$, если выполняется система неравенств:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_3\in[0.1,0.3)\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1\le 0.9\\ x_2\ge 0.1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1\ge 0.1\\ x_2\le 0.9\end{cases}\end{array}\right.\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1>0.7\\ x_2<0.3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1<0.3\\ x_2>0.7\end{array}\right.\end{cases}\end{cases}.$$

Чтобы облегчить записи, запишем полученную систему в виде конъюнкции двух двуместных предикатов: $H(x_1,x_2)=h_1(x_1,x_2)\vee h_2(x_1,x_2)$ и $G(x_1,x_2)=g_1(x_1,x_2)\wedge g_2(x_1,x_2)$, которая обеспечивает нижнюю и верхнюю границы промежутка $[0.1,0.3)$:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_3\in[0.1,0.3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1\le 0.9\\ x_2\ge 0.1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1\ge 0.1\\ x_2\le 0.9\end{cases}\end{array}\right.\wedge\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1>0.7\\ x_2<0.3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1<0.3\\ x_2>0.7\end{array}\right.\end{cases}.$$

Проиллюстрируем порядок построения множества истинности двуместного предиката $\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_2\in[0.1,0.3)$ (рис.5.2).

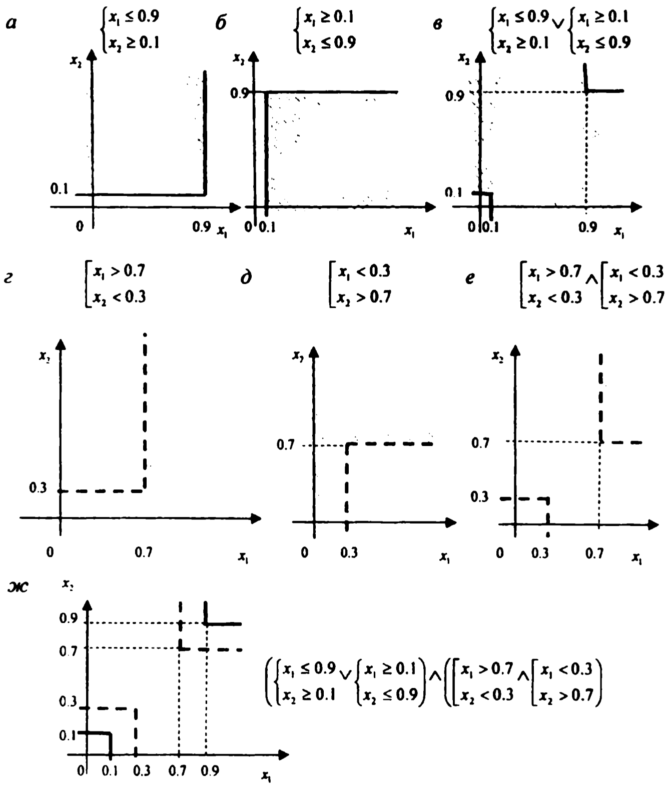


Рис. 5.2. Геометрическая иллюстрация построения множества истинности двуместного предиката $\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \in [0.1,0.3)$

Рассмотрим более сложный пример.

Найдем, каким промежуткам отрезка [0,1] должны принадлежать нечеткие переменные x_1, x_2, x_3, чтобы для функции $f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3$ выполнялось неравенство $0.6 \le f < 0.9$.

Обозначим $p = \bar{x}_1 \cdot x_2$, $q = x_1 \cdot x_3$. Множество истинности двуместного предиката $H(p,q): 0.6 \le p \vee q < 0.9$ определяется условиями:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}p \geq 0.6\\ q \geq 0.6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}p < 0.9\\ q < 0.9\end{array}\right.\end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\bar{x}_1 \cdot x_2 \geq 0.6\\ x_1 \cdot \bar{x}_3 \geq 0.6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\bar{x}_1 \cdot x_2 < 0.9\\ x_1 \cdot \bar{x}_3 < 0.9\end{array}\right.\end{array}\right..$$

Рассмотрим отдельно совокупность $\left[\begin{array}{l}\bar{x}_1 \cdot x_2 \geq 0.6\\ x_1 \cdot \bar{x}_3 \geq 0.6\end{array}\right.$, выполнение которой является условием, обеспечивающим нижнюю границу интервала $[0.6, 0.9)$, и систему $\left\{\begin{array}{l}\bar{x}_1 \cdot x_2 < 0.9\\ x_1 \cdot \bar{x}_3 < 0.9\end{array}\right.$, которая обеспечивает верхнюю границу интервала.

Неравенство $\bar{x}_1 \cdot x_2 \geq 0.6$ означает, что конъюнкция $\bar{x}_1 \cdot x_2 \in [0.6, 1]$. Для попадания такой функции в указанный интервал, согласно табл. 5.3, необходимо выполнение системы условий:

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x_1 \leq 1-0.6\\ x_2 \geq 0.6\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1 > 1-1\\ x_2 < 1\end{array}\right.\end{array}\right..$$

Поскольку неравенства $x_1 > 0$ и $x_2 < 1$ выполняются при любых значениях нечетких булевых переменных, за исключением крайних случаев $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, которые следует рассматривать особо, справедлива равносильность:

$$\bar{x}_1 \cdot x_2 \geq 0.6 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1 \leq 0.4\\ x_2 \geq 0.6\end{array}\right..$$

Рассуждая аналогично в отношении неравенства $x_1 \cdot \bar{x}_3 \geq 0.6$ и используя табл.5.4, получаем цепочку эквивалентностей:

$$x_1 \cdot \bar{x}_3 \geq 0.6 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x_1 \geq 0.6\\ x_3 \leq 0{,}4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1 < 1\\ x_3 > 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1 \geq 0.6\\ x_3 \leq 0.4\end{array}\right..$$

Таким образом, условием $H(x_1, x_2, x_3)$, обеспечивающим нижнюю границу интервала $[0.6, 0.9)$, в который должна попасть функция $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3$, является выполнение совокупности двух систем неравенств:

$$H(x_1, x_2, x_3): \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x_1 \leq 0.4\\ x_2 \geq 0.6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x_1 \geq 0.6\\ x_3 \leq 0.4\end{array}\right.\end{array}\right..$$

Аналогичные рассуждения с использованием табл. 5.4 приводят к выводу о том, что условием $G(x_1,x_2,x_3)$, обеспечивающим верхнюю границу интервала $[0.6,0.9)$, в который должна попасть функция $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2 \vee x_1\cdot \bar{x}_3$, является выполнение системы двух совокупностей неравенств:

$$G(x_1,x_2,x_3):\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1>0.1\\x_2<0.9\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1<0.9\\x_3>0.1\end{array}\right.\end{cases}.$$

Чтобы функция $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2 \vee x_1\cdot \bar{x}_3$ попала в заданный промежуток, необходимо выполнение как условия $H(x_1,x_2,x_3)$, так и условия $G(x_1,x_2,x_3)$:

$$H(x_1,x_2,x_3)\wedge G(x_1,x_2,x_3):\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1\le 0.4\\x_2\ge 0.6\end{cases}\\ \begin{cases}x_1\ge 0.6\\x_3\le 0.4\end{cases}\end{array}\right.\wedge\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1>0.1\\x_2<0.9\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1<0.9\\x_3>0.1\end{array}\right.\end{cases}.$$

Условие $H(x_1,x_2,x_3)$ выполняется, если справедлива хотя бы одна из двух систем неравенств $H_1:\begin{cases}x_1\le 0.4\\x_2\ge 0.6\end{cases}$ или $H_2:\begin{cases}x_1\ge 0.6\\x_3\le 0.4\end{cases}$.

Условие $G(x_1,x_2,x_3)$ можно представить следующим образом:

$$G(x_1,x_2,x_3)=(g_1\vee g_2)\cdot(g_3\vee g_4),$$

где $g_1:(x_1>0.1)$, $g_2:(x_2<0.9)$, $g_3:(x_1<0.9)$, $g_4:(x_3>0.1)$ – одноместные предикаты.

Используя свойства конъюнкции и дизъюнкции, преобразуем предикат $G(x_1,x_2,x_3)$:

$$G(x_1,x_2,x_3)=(g_1\vee g_2)\cdot(g_3\vee g_4)=g_1\cdot g_3\vee g_1\cdot g_4\vee g_2\cdot g_3\vee g_2\cdot g_4=\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1>0.1\\x_1<0.9\end{cases}\\ \begin{cases}x_1>0.1\\x_3>0.1\end{cases}\\ \begin{cases}x_2<0.9\\x_1<0.9\end{cases}\\ \begin{cases}x_2<0.9\\x_3>0.1\end{cases}\end{array}\right..$$

Предикат $G(x_1,x_2,x_3)$ становится истинным, если переменные x_1, x_2, x_3 удовлетворяют хотя бы одной из четырех систем: $G_1:\begin{cases}x_1>0.1\\x_1<0.9\end{cases}$, $G_2:\begin{cases}x_1>0.1\\x_3>0.1\end{cases}$, $G_3:\begin{cases}x_2<0.9\\x_1<0.9\end{cases}$, $G_4:\begin{cases}x_2<0.9\\x_3>0.1\end{cases}$.

Таким образом, выполнение условий $H(x_1,x_2,x_3)$ и $G(x_1,x_2,x_3)$ распадается на восемь систем неравенств:

$$1)\ H_1\wedge G_1=\begin{cases}x_1\le 0.4\\ x_2\ge 0.6\\ x_1>0.1\\ x_1<0.9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0.1<x_1\le 0.4\\ x_2\ge 0.6\end{cases},\ 2)\ H_1\wedge G_2=\begin{cases}x_1\le 0.4\\ x_2\ge 0.6\\ x_1>0.1\\ x_3>0.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0.1<x_1\le 0.4\\ x_2\ge 0.6\\ x_3>0.1\end{cases},$$

$$3)\ H_1\wedge G_3=\begin{cases}x_1\le 0.4\\ x_2\ge 0.6\\ x_2<0.9\\ x_1<0.9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1\le 0.4\\ 0.6\le x_2<0.9\end{cases},\ 4)\ H_1\wedge G_4=\begin{cases}x_1\le 0.4\\ x_2\ge 0.6\\ x_2<0.9\\ x_3>0.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0.1<x_1\le 0.4\\ 0.6\le x_2<0.9,\\ x_3>0.1\end{cases}$$

$$5)\ H_2\wedge G_1=\begin{cases}x_1\ge 0.6\\ x_3\le 0.4\\ x_1>0.1\\ x_1<0.9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0.6\le x_1<0.9\\ x_3\le 0.4\end{cases},\ 6)\ H_2\wedge G_2=\begin{cases}x_1\ge 0.6\\ x_3\le 0.4\\ x_1>0.1\\ x_3>0.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1\ge 0.6\\ 0.1<x_3\le 0.4\end{cases},$$

$$7)\ H_2\wedge G_3=\begin{cases}x_1\ge 0.6\\ x_3\le 0.4\\ x_2<0.9\\ x_1<0.9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0.6\le x_1<0.9\\ x_2<0.9\\ x_3\le 0.4\end{cases},\ 8)\ H_2\wedge G_4=\begin{cases}x_1\ge 0.6\\ x_3\le 0.4\\ x_2<0.9\\ x_3>0.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1\ge 0.6\\ 0.1<x_3\le 0.4.\\ x_2<0.9\end{cases}$$

Истинность любого из этих восьми предикатов обеспечивает попадание функции $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_3$ в промежуток $[0.6,0.9)$. Пусть, например, истинным является предикат $H_2\wedge G_2:\begin{cases}x_1\ge 0.6\\ 0.1<x_3\le 0.4\end{cases}$. Данная система неравенств не содержит переменной x_2, но поскольку x_2 – нечеткая булева переменная, она удовлетворяет двойному неравенству $0\le x_2\le 1$.

Найдем множество значений функции $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_3$ при условии истинности $H_2\wedge G_2$:

1. $\begin{cases}0.6\le x_1\le 1\\ 0\le x_2\le 1\\ 0.1<x_3\le 0.4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\bar{x}_1\le 0.4\\ 0\le\bar{x}_2\le 1\\ 0.6\le\bar{x}_3<0.9\end{cases}$.

2. $\bar{x}_1\cdot x_2\in[\min(0,0),\min(0.4,1)]=[0,0.4]$.

3. $x_1\cdot\bar{x}_3\in[\min(0.6,0.6),\min(1,0.9))=[0.6,0.9)$.

4. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_3\in[\max(0,0.6),\max(0.4,0.9))=[0.6,0.9)$.

Подводя итог, можно сказать, что ***анализ аналитических функций нечетких булевых переменных сводится к оперированию предикатами бинарной (обычной) логики.***

Аналогично тому, как строятся схемы реализации булевых функций от обычных бинарных переменных, можно построить схему реализации нечеткой булевой функции. Задача состоит в том, чтобы задать последовательность действий преобразования произвольного набора входных сигналов $x_i \in [a_{1i}, a_{2i}] \subseteq [0,1]$ $(i = 1,2,...)$ в заранее заданный выходной сигнал. Решение такой задачи называется "синтезом" нечеткой функции [6].

Рассмотрим, каким образом можно построить схему реализации нечеткой булевой функции на следующем примере.

Пусть требуется построить схему реализации функции $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2 \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$, обеспечивающую выполнение условия $f(x_1,x_2) \in [0.4, 0.7)$, если $x_1 \in [0.2, 0.6]$ и $x_2 \in [0.4, 0.8]$.

Найдем и запишем в таблицу условия, которым должны удовлетворять входные сигналы x_1 и x_2 для того, чтобы на выходе оказалось выполненным включение $x_1 \cdot x_2 \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \in [0.4, 0.7)$.

Введем обозначения: $p = x_1 \cdot x_2$, $q = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. Тогда $f = p \cdot q$. Используя табл.5.4, получаем

Условия, обеспечивающие нижнюю границу выходного сигнала f	Условия, обеспечивающие верхнюю границу выходного сигнала f
$\begin{cases} p \ge 0.4 \\ q \ge 0.4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p < 0.7 \\ q < 0.7 \end{array}\right.$
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \ge 0.4 \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \ge 0.4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 < 0.7 \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 < 0.7 \end{array}\right.$
$\begin{cases} \begin{cases} x_1 \ge 0.4 \\ x_2 \ge 0.4 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 \le 1 - 0.4 \\ x_2 \le 1 - 0.4 \end{array}\right. \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 < 0.7 \\ x_2 < 0.7 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x_1 > 1 - 0.7 \\ x_2 > 1 - 0.7 \end{cases} \end{array}\right.$
$\begin{cases} \begin{cases} x_1 \ge 0.4 \\ x_2 \ge 0.4 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 \le 0.6 \\ x_2 \le 0.6 \end{array}\right. \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 < 0.7 \\ x_2 < 0.7 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x_1 > 0.3 \\ x_2 > 0.3 \end{cases} \end{array}\right.$

Легко показать, что сигналы $x_1 \in [0.2, 0.6]$ и $x_2 \in [0.4, 0.8]$, поступающие на вход схемы реализации, не обеспечивают нужного сигнала на ее выходе.

Действительно

$$\overline{x_1} \in [1-0.6, 1-0.2] = [0.4, 0.8],$$

$$\overline{x_2} \in [1-0.8, 1-0.4] = [0.2, 0.6],$$

$$x_1 \cdot x_2 \in [\min(0.2, 0.4), \min(0.6, 0.8)] = [0.2, 0.6],$$

$$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \in [\max(0.4, 0.2), \max(0.6, 0.8)] = [0.4, 0.8],$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \in [\min(0.2, 0.4), \min(0.6, 0.8)] = [0.2, 0.6] \neq [0.4, 0.7].$$

Чтобы сигналы x_1 и x_2 обеспечивали нужный выход, введем ***параметры согласования***. Параметры согласования – это множители входных сигналов, обеспечивающие нижнюю и верхнюю границы выходного сигнала:

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x_1 \cdot k_1 \ge 0.4 \\ x_2 \cdot k_2 \ge 0.4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1 \cdot k_3 \le 0.6 \\ x_2 \cdot k_4 \le 0.6 \end{array}\right. \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 \cdot m_1 < 0.7 \\ x_2 \cdot m_2 < 0.7 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x_1 \cdot m_3 > 0.3 \\ x_2 \cdot m_4 > 0.3 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Поскольку $x_1 \ge 0.2$, $x_2 \ge 0.4$, $x_1 \le 0.6$ и $x_2 \le 0.8$, параметры согласования находятся из следующих равенств:

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0.2 \cdot k_1 = 0.4 \\ 0.4 \cdot k_2 = 0.4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 0.6 \cdot k_3 = 0.6 \\ 0.8 \cdot k_4 = 0.6 \end{array}\right. \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0.6 \cdot m_1 = 0.7 \\ 0.8 \cdot m_2 = 0.7 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0.2 \cdot m_3 = 0.3 \\ 0.4 \cdot m_4 = 0.3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ll} k_1 = 2 & m_1 = \frac{7}{6} \\ k_2 = 1 & m_2 = \frac{7}{8} \\ k_3 = 1 & m_3 = \frac{3}{2} \\ k_4 = \frac{3}{4} & m_4 = \frac{3}{4} \end{array}.$$

Для построения схем реализации используются следующие элементы:

k_n, m_i – устройство параметрического согласования; умножает входной сигнал на параметр согласования;

ИЛИ – логический элемент, реализующий объединение интервалов;

И – логический элемент, реализующий пересечение интервалов;

НЕ – логический элемент, реализующий операцию $1-x$;

α – устройство, задающее нижний предел; пропускает сигналы, удовлетворяющие неравенству $p \ge \alpha$;

β – устройство, задающее верхний предел; пропускает сигналы, удовлетворяющие неравенству $p < \beta$.

Используя эти элементы, построим схему, реализующую попадание функции $f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\cdot(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)$ в интервал $[0.4,0.7)$ (рис. 5.3).

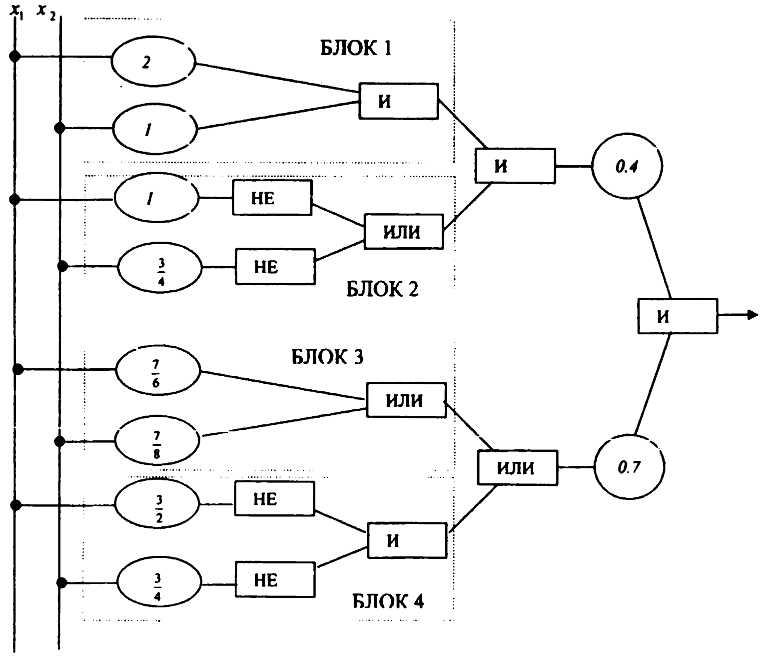


Рис.5.3. Схема реализации попадания функции $f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\cdot(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)$ в интервал $[0.4,0.7)$ при условиях $x_1\in[0.2,0.6)$, $x_2\in[0.4,0.8)$

Блоки 1 и 2 обеспечивают нижнюю границу промежутка $[0.4,0.7)$.

Блок 1. На вход поступают сигналы $x_1\in[0.2,0.6]$ и $x_2\in[0.4,0.8]$. Проходя через устройства параметрического согласования, они умножаются на числа $k_1=2$ и $k_2=1$: $k_1x_1\in[2\cdot0.2,2\cdot0.6]=[0.4,1.2]$ и $k_2x_2\in[0.4,0.8]$. Устройство "И" выполняет пересечение интервалов: $p=k_1x_1\wedge k_2x_2\in[0.4,1.2]\cap[0.4,0.8]=[0.4,0.8]$.

Блок 2. Сигналы $x_1\in[0.2,0.6]$ и $x_2\in[0.4,0.8]$, проходя устройства параметрического согласования, умножаются на числа $k_3=1$ и $k_4=\frac{3}{4}$: $k_3x_1\in[0.2,0.6]$ и $k_4x_2\in[\frac{3}{4}\cdot0.4,\frac{3}{4}\cdot0.8]=[0.3,0.6]$. Далее сигналы преобразуются устройством "НЕ", которое выполняет вычитание из 1: $\overline{k_3x_1} \in [1-0.6, 1-0.2] = [0.4, 0.8]$ и $\overline{k_4x_2} \in [1-0.6, 1-0.3] = [0.4, 0.7]$. Устройство "ИЛИ" объединяет промежутки, выдавая сигнал $q = \overline{k_3x_1} \vee \overline{k_4x_2} \in [0.4, 0.7] \cup [0.4, 0.8] = [0.4, 0.8]$.

Сигналы $p \in [0.4, 0.8]$ и $q \in [0.4, 0.8]$ поступают на устройство "И", выполняющее пересечение промежутков: $H = p \wedge q \in [0.4, 0.8] \cap [0.4, 0.8] = [0.4, 0.8]$.

Блоки 3 и 4 обеспечивают верхнюю границу промежутка $[0.4, 0.7)$.

Блок 3. Сигналы $x_1 \in [0.2, 0.6]$ и $x_2 \in [0.4, 0.8]$, проходя через устройства параметрического согласования, умножаются на числа $m_1 = \frac{7}{6}$ и $m_2 = \frac{7}{8}$: $m_1x_1 \in [\frac{7}{6} \cdot 0.2, \frac{7}{6} \cdot 0.6] = [\frac{1.4}{6}, \frac{4.2}{6}] = [0.2(3), 0.7]$ и $m_2x_2 \in [\frac{7}{8} \cdot 0.4, \frac{7}{8} \cdot 0.8] = [0.35, 0.7]$. Устройство "ИЛИ" выполняет объединение интервалов: $p = m_1x_1 \vee m_2x_2 \in [0.2(3), 0.7] \cup [0.35, 0.7] =$ $= [0.2(3), 0.7]$.

Блок 4. Устройства параметрического согласования умножают сигналы $x_1 \in [0.2, 0.6]$ и $x_2 \in [0.4, 0.8]$ на числа $m_3 = \frac{3}{2}$ и $m_4 = \frac{3}{4}$: $m_3x_1 \in [\frac{3}{2} \cdot 0.2, \frac{3}{2} \cdot 0.6] = [0.3, 0.9]$, $m_4x_2 \in [\frac{3}{4} \cdot 0.4, \frac{3}{4} \cdot 0.8] = [0.3, 0.6]$. Далее эти сигналы поступают на устройства "НЕ", выполняющие вычитание из единицы: $\overline{m_3x_1} \in [1-0.9, 1-0.3] = [0.1, 0.7]$, $\overline{m_4x_2} \in [1-0.6, 1-0.3] = [0.4, 0.7]$. Устройство "И" выполняет пересечение интервалов: $q = \overline{m_3x_1} \wedge \overline{m_4x_2} \in [0.1, 0.7] \cap [0.4, 0.7] = [0.4, 0.7]$.

Сигналы $p \in [0.2(3), 0.7]$ и $q \in [0.4, 0.7]$ с блоков 3 и 4 проходят устройство "ИЛИ", которое выполняет объединение интервалов: $G = p \vee q \in [0.2(3), 0.7] \cup$ $\cup [0.4, 0.7] = [0.2(3), 0.7]$.

Сигнал $H \in [0.4, 0.8]$ проходит устройство, которое задет нижний предел и пропускает лишь сигналы, не меньшие чем 0.4. Сигнал $G \in [0.2(3), 0.7]$ проходит через устройство, которое задает верхний предел и пропускает лишь сигналы, меньшие 0.7. Сигнал h пройдет через устройство, задающее нижний предел, полностью. Сигнал g выйдет с устройства, задающего верхний предел, в виде $G \in [0.2(3), 0.7)$. Устройство "И" на выходе схемы выполнит пересечение промежутков $H \in [0.4, 0.8]$ и $G \in [0.2(3), 0.7]$. Таким образом, на выходе схемы будет сформирован сигнал $f = H \wedge G \in [0.4, 0.8] \cap [0.2(3), 0.7) = [0.4, 0.7)$.

5.4. Лингвистические переменные "истина" и "ложь"

Нечеткие булевы переменные можно рассматривать как функции принадлежности термов лингвистической переменной X.

Приведем пример. Пусть X="*прогноз погоды*" – лингвистическая переменная. Терм-множество переменной X включает термы: "*солнечно*", "*ветрено*", "*пасмурно*". Сами синоптики дают оценку своим прогнозам, к примеру, с точки зрения теории вероятностей и указывают надежность своих прогнозов следующим образом:

p = "*солнечно*", $p \in [0.7, 0.8)$;

q = "*ветрено*", $q \in [0.3, 0.5)$;

h = "*пасмурно*", $h \in [0.8, 0.9)$.

С точки зрения синоптиков, например, прогнозу "*солнечно*" следует доверять на 70 – 80%, аналогично другим прогнозам.

Пусть прогноз на завтра, т. е. значение лингвистической переменной X= ="*завтра будет солнечно или пасмурно и ветрено*". Построенное таким образом предложение представляет собой аналитическую булеву функцию от нечетких переменных $X = p \vee q \cdot h$. Найдем промежуток, в который попадают значения этой функции:

$$q \cdot h \in [\min(0.3, 0.8), \min(0.5, 0.9)) = [0.3, 0.5),$$

$$p \vee q \cdot h \in [\max(0.7, 0.3), \max(0.8, 0.5)) = [0.7, 0.8).$$

На завтра прогноз синоптиков был оценен как "не слишком истинный", т.е. определенному значению лингвистической переменной X была поставлена в соответствие модифицированная лингвистическая переменная "*истина*".

Таким образом, значения лингвистических переменных можно рассматривать как нечеткие высказывания, к которым приложимы оценки с точки зрения истинности или ложности. Но эти оценки сами являются лингвистическими переменными, т.е. именами нечетких подмножеств множества $U = [0,1]$.

В обычной бинарной логике оценка истинности высказывания или предиката имеет лишь два значения: 1("*истина*") и 0("*ложь*"). В нечеткой логике такая оценка может принимать любое значение на отрезке $[0,1]$. Значение функции принадлежности μ_p нечеткой переменной p может рассматриваться как результат действия какого-либо модификатора на термы "*истинно*"(T) или "*ложно*"(F). Например, $\mu_T(p) = 0.5$ можно интерпретировать как "*не истинно и не ложно*", $\mu_T(p) = 0.6$ – "*не слишком истинно*", $\mu_F(p) = 0.6$ – "*слегка ложно*" и т.п.

Приведем типичный график функций принадлежности лингвистических переменных "*истинно*" и "*ложно*" (рис. 5.4) [2].

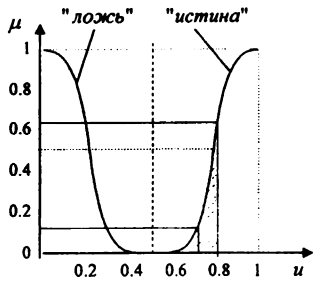


Рис.5.4. Функции принадлежности лингвистических переменных "*истина*" и "*ложь*"

Значения истинности переменной $X = p \vee q \cdot h \in [0.7, 0.8)$ отмечены на рис. 5.3 штриховкой. Как видно из рис.5.4, промежутку $[0.7, 0.8)$ на оси u соответствует промежуток $[0.15, 0.65)$ на оси μ, т.е. истинность прогноза синоптиков $X =$ "*завтра будет солнечно, или пасмурно и ветрено*"$= p \vee q \cdot h \in [0.7, 0.8)$ оказалась весьма невысокой: $\mu_{истина} \in [0.15, 0.65)$, что и может соответствовать терминам "*не слишком истинно*", "*истинность прогноза весьма низкая*" и т.п.

Функции принадлежности лингвистических переменных "*истина*" и "*ложь*" симметричны относительно прямой $u = 0.5$ (см. рис. 5.4). При работе с этими функциями можно применять формулы:

$$\mu_{истина} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2x - 1 - a_1}{1 - a_1}\right)\right), \quad x \in [a_1, 1], \tag{5.11}$$

$$\mu_{ложь} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - a_1 - 2x}{1 - a_1}\right)\right), \quad x \in [0, 1 - a_1], \tag{5.12}$$

где $a_1 \in (0,1)$ – параметр, задаваемый экспертом.

Задания для самостоятельной работы

1. Функции нечетких булевых переменных заданы формулами: $f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee\bar{x}_2\vee\overline{x_1x_3}$, $f_2(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1\vee\bar{x}_2}\vee\overline{\bar{x}_1x_3}$, $f_3(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1\bar{x}_2x_3\vee\overline{x_1x_3}}$, $f_4(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee\overline{x_1x_2x_3}$.

1) Упростите формулы.

2) Найдите значения функций, если $x_1=0.4$, $x_2=0.6$, $x_3=0.9$.

2. Функции нечетких булевых переменных заданы формулами: $f_1(x_1,x_2)=\bar{x}_1\vee x_2\bar{x}_1\vee x_2$, $f_2(x_1,x_2)=x_1\bar{x}_1\vee x_2\bar{x}_2$, $f_3(x_1,x_2)=\overline{x_1x_2}\vee x_1x_2$, $f_4(x_1,x_2)=x_1\vee\overline{x_2x_1\bar{x}_2}$, $f_5(x_1,x_2)=x_1\bar{x}_2\bar{x}_1\vee x_2$.

1) Упростите формулы (если это возможно).

2) Постройте таблицы значений функций.

3) Запишите множества истинности предикатов $f_i\in[0.4,0.8)$ $i=1,2,3,4,5$ и дайте их геометрическую интерпретацию.

4) Постройте схемы реализации каждой функции, если $x_1\in[0.2,0.5]$, $x_2\in[0.5,0.9]$.

3. Выступая в роли эксперта, оцените истинность и ложность следующего рекламного текста: "Здесь Вы можете приобрести товар по Вашему вкусу и очень недорого", если заказчики рекламы так оценивают достоверность ее высказываний:

$p=$"*Вы можете приобрести товар по Вашему вкусу*"$\in[0.6,0.8]$,

$q=$"*Вы можете приобрести товар очень недорого* "$\in[0.3,0.9]$.

С помощью формул (5.11) и (5.12) рассмотрите несколько значений параметра a_1. Сформулируйте Ваши заключения с помощью модифицированных термов "*истина*" и "*ложь*".

Заключение

Овладение математическими аспектами теории нечетких множеств является необходимым, но не достаточным условием успешного применения ее специалистами по прикладной информатике.

Теория нечетких множеств лежит в основе алгоритмов решения плохо формализуемых задач, используется при работе с нейронными сетями, экспертными системами, системами управления в условиях неполной, неточной или противоречивой информации и т.д.

Приложения теории нечетких множеств весьма обширны. Именно приложения этой теории являются необходимым компонентом знаний специалиста по прикладной информатике. Но чтобы правильно выбрать алгоритм, уметь грамотно его использовать и, наконец, интерпретировать полученные результаты, надо знать основы теории.

Библиографический список

1. *Баранский В.А.* Введение в общую алгебру и ее приложения: Учеб. пособие. Екатеринбург: УрГУ, 1998. 170 с.

2. *Бернштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткие графы и гиперграфы. М.: Науч. мир., 2005. 255 с.

3. Вопросы анализа и процедуры принятия решений/Под ред. И.Ф.Шахнова. М.: Мир., 1976. 228 с.

4. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир., 1976. 165 с.

5. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь. 1982. 431 с.

6. Классификация и кластер/Под ред. Райзин Дж. Вэн. М.: Мир., 1980. 389 с.

7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 720 с.

8. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 295 с.

9. *Люггер, Джордж Ф.* Искусственный интеллект. Стратегии и методы решения сложных проблем. М.; СПб.;Киев: Вильямс, 2003. 863 с.

10. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. 487 с.

11. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта /Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 311 с.

12. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения /Под ред. Р. Ягера Рональда. М.: Радио и связь, 1986. 406 с.

13. Экспертные системы. Принципы работы и примеры/Под ред. Р. Форсайт. М.: Радио и связь, 1987. 223 с.

14. *Ярушкина Н.Г.* Основы теории нечетких и гибридных систем. М.: Финансы и статистика, 2004. 319 с.

Оглавление

Учебное издание

Конышева Людмила Константиновна
Серова Тамара Александровна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Редактор Л.И. Кузнецова
Оформление обложки А.А. Яговитиной

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета университета

Подписано в печать 0.0 .07. Формат 70×108/16. Бумага для множ. аппаратов. Печать плоская. Усл. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 8,6. тираж 100 экз. Заказ №
Издательство ГОУ ВПО "Российский государственный профессионально-педагогический университет". Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.

Ризограф ГОУ ВПО "Российский государственный профессионально-педагогический университет". Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.